ХОЧУ В ЛИЦЕЙ!

10

Учебные материалы
для подготовки
к вступительным испытаниям
по математике
для поступающих в 10-й класс
Лицея НИУ ВШЭ

Составление и общая редакция:
Д.С. Чистяков

Авторы заданий: А. В. Гиляровская
Е. М. Ивенина
Ю. С. Рудько
А. Ф. Салимова
О. В. Смирнова
Д. С. Чистяков

Составление и общая редакция: Д. С. Чистяков

Содержание

Предисловие

Авторы данного пособия ставили своей целью помочь абитуриентам, поступающим в 10-ый класс Лицея НИУ ВШЭ. Пособие содержит разбор демонстрационных вариантов и задания для самостоятельной подготовки. Часть из этих заданий была взята из вариантов прошлых лет. В целом сборник дает понять ожидаемый уровень освоения математики от абитуриентов.

Для поступления в Лицей НИУ ВШЭ всем абитуриентам необходимо успешно справиться с задачами по математике первой части комплексного теста. Поступающим на направления «Математика», «Информатика, инженерия и математика» и «Экономика и математика» необходимо продемонстрировать хороший уровень владения математикой в решении задач второй части комплексного теста. Задания для самостоятельного решения делятся на две группы: задачи группы A в большей степени направлены на подготовку к первой части вступительных испытаний, задачи группы B — ко второй. Авторы уверены, что владение алгоритмами решения представленных здесь задач может служить прекрасным дополнением к глубокому и основательному изучению курса школьной математики.

С пожеланиями успехов
авторы настоящего пособия

Структура вступительного экзамена по математике в 10-й класс

Первую часть комплексного теста выполняют все абитуриенты, поступающие в 10-ой класс Лицея НИУ ВШЭ. Работа представляет собой тест и состоит из 10 заданий с открытым ответом. Ответом является целое число или конечная десятичная дробь с 1 - 2 знаками после запятой. Проверка ответов осуществляется с помощью информационных технологий.

Задания оцениваются по шкале, приведенной в таблице:

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Количество баллов	0,5	0,5	0,5	0,5	1	1	1	1,5	1,5	2

Вторую часть комплексного теста выполняют ***только поступающие на направления «Математика», «Информатика, инженерия и математика» и «Экономика и математика»*** Лицея НИУ ВШЭ. Она состоит из пяти заданий с развернутым ответом. Проверка решений осуществляется по критериям, устанавливаемым приемной комиссией Лицея НИУ ВШЭ.

Задания оцениваются по шкале, приведенной в таблице:

Номер задания	1	2	3	4	5
Количество баллов	3	3	4	5	5

Темы для подготовки: числа и вычисления (натуральные, целые, рациональные числа, действительные числа); алгебраические выражения (буквенные выражения, многочлены, алгебраические дроби); уравнения и неравенства (линейные, квадратные уравнения и неравенства с одной переменной и их системы), решение текстовых задач; числовые последовательности (арифметическая и геометрическая прогрессии, сложные проценты); функции, линейная функция, квадратичная функция, обратная пропорциональность, $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$, $y = |x|$, их свойства и графики, решение уравнений и неравенств с использованием графиков функций; геометрические фигуры и их свойства (треугольники, многоугольники, окружность и круг), измерение геометрических величин, вычисление площадей плоских фигур; решение уравнений в целых числах.

Литература для подготовки к первой части комплексного теста

1. Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешков К.И. и другие (под редакцией С.А. Теляковского). Алгебра, 9 класс. — М.: Просвещение, 2022.

2. Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешков К.И. и другие. Алгебра, 9 класс. Углубленный уровень. — М.: Просвещение, 2022.

3. Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С. (под редакцией Подольского В.Е.). Алгебра, 9 класс. — М.: Просвещение, 2022.

4. Мерзляк А.Г., Поляков В.М. (под редакцией Подольского В.Е.). Алгебра, 9 класс. Углубленный уровень. — М.: Просвещение, 2022.

5. Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б., Прасолов В.В. (под редакцией Садовничего В.А.). Геометрия, 9 класс. — М.: Просвещение, 2022.

6. Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С. (под редакцией Подольского В.Е.). Геометрия, 9 класс. — М.: Просвещение, 2022.

Литература для подготовки ко второй части комплексного теста

1. Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасиченко П.И. Задачи по математике. Алгебра. — М.: Физматлит, 2007.

2. Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасиченко П.И. Задачи по математике. Уравнения и неравенства. — М.: Физматлит, 2007.

3. Галицкий М.Л., Гольдман А.М., Звавич Л.И. Сборник задач по алгебре: учебное пособие для 8—9 классов с углубленным изучением математики — М.: Просвещение, 2001.

4. Гордин Р.К. Геометрия. Планиметрия. 7–9 классы. — М: МЦНМО, 2004.

5. Иванов О.А. Практикум по элементарной математике: Алгебро-аналитические методы: Учеб. пособие. — М.: МЦНМО, 2001.

6. Кравцев С.В., Макаров Ю.Л., Максимов М.И. и др. Методы решения задач по алгебре: от простых до самых сложных. — М.: Экзамен, 2001.

7. Олехник С.Н., Потапов М.К., Пасиченко П.И. Уравнения и неравенства. Нестандартные методы решения: справочник. – М.: Факториал, 1997.

8. Олехник С.Н., Потапов М.К., Нестеренко Ю.В. Конкурсные задачи по математике: Справочное пособие. – Изд. 3-е, стер. — М.: Физматлит, 2003.

9. Сергеев И.Н. Математика: задачи с ответами и решениями. — М.: КДУ, 2013.

10. Хорошилова Е.В. Элементарная математика. Учебное пособие для старшеклассников и абитуриентов. Часть 1: Теория чисел. Алгебра. — М.: МГУ, 2010.

11. Хорошилова Е.В. Элементарная математика: Учеб. пособие для слушателей подготовительных отделений, абитуриентов и старшеклассников. Часть 2. — М.: МГУ, 2010.

Лицей НИУ ВШЭ

Комплексный тест в 10-й класс

Задания по **математике 2023 демо**

Выполните задания (10 баллов)

$\boxed{\mathbf{1}}$ *(0.5 балла)* Вычислите: $58 \cdot \left(\left(2\frac{1}{14}\right)^{-2} - \left(1\frac{14}{15}\right)^{-2}\right)$.

или

найдите значение выражения $(-6t)$, если $t = \dfrac{11}{6} : (2,65 : 2,5 - 1,1)$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ *(0.5 балла)* Решите уравнение

$$\frac{7}{x^2+3x-4} - \frac{3x+6}{x^2+x-2} = \frac{1}{1-x}.$$

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите наименьший из них.

или

решите неравенство

$$\left(\sqrt{x+2}+1\right) \cdot (7,3x-20) \leq 0.$$

В ответе укажите количество целых чисел, являющихся решениями неравенства.

$\boxed{\mathbf{3}}$ *(0.5 балла)* В параллелограмме $MFKT$ угол T равен $135°$, а диагональ FT перпендикулярна стороне FK, которая равна 14. Найдите площадь параллелограмма $MFKT$.

или

треугольник MPK равнобедренный. Известно, что MK — основание, угол при котором равен $75°$. Найдите длину стороны MP, если высота, проведенная к этой стороне, равна 18.

$\boxed{\mathbf{4}}$ *(0.5 балла)* Ежемесячный доход семьи равен 95 000 руб., причем 40% этой суммы составляет заработная плата Татьяны. В результате кризиса её заработная плата снизилась на 10%. На сколько процентов снизился общий доход семьи, если доходы остальных членов семьи не изменились?

или

Динара и Карим состязались в беге на 1 км. Динара обогнала Карима на 90 секунд, но если бы Карим бежал в полтора раза быстрее, то он обогнал бы Динару на 1 минуту. С какой скоростью бежала Динара? Ответ дайте в км/ч.

$\boxed{\mathbf{5}}$ *(1 балл)* Найдите сумму всех трёхзначных чисел, которые при делении на 3 дают остаток 1, а при делении на 4 — остаток 2.

или

Миша начал читать книгу. Каждый день он читал в два раза меньше страниц, чем в предыдущий, и прочитал книгу за шесть дней. Сколько страниц книги прочитал Миша за третий день, если в книге 189 страниц?

$\boxed{\mathbf{6}}$ *(1 балл)* Найдите сумму всех целых чисел, входящих в область определения функции

$$f(x) = \sqrt{9 - x \cdot |x|} + \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 3}{10x^2 - 11x - 62}}.$$

или

найдите наибольшее значение функции $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x+2}$ при условии, что аргумент принимает значения из области определения функции $g(x) = \sqrt{(x+5)(x+2)} + \sqrt{x+1}$.

$\boxed{7}$ *(1 балл)* Найдите значение выражения

$$\sqrt{18}\left(\sqrt{x}-3\right)\sqrt{2x+18+12\sqrt{x}-6x}$$

при $x = 0,15$.

или

найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt{3}a - \left(1+3\sqrt{3}\right)\sqrt{ab}+3b}{\sqrt{a+9b-6\sqrt{ab}}} - \sqrt{b}$ при $a = 27$, $b = 5$.

$\boxed{8}$ *(1,5 балла)* Замените все буквы цифрами (одинаковые буквы — одинаковыми цифрами, разные буквы — разными), чтобы разность

ЛИЦЕЙ – ОГОНЬ

приняла наибольшее возможное значение. В ответе укажите это значение.

или

в конкурсе по поеданию булочек участвовало 5 человек. Все они съели разное количество булочек, и каждому удалось съесть хотя бы одну. Когда каждого участника спросили, сколько булочек в сумме было съедено за время конкурса, они назвали различные числа от 11 до 15, причём известно, что занявший первое место ошибся на 1, занявший второе — на 2, третье — на 3, четвёртое — на 4, пятое — на 5 булочек. Сколько булочек съел победитель конкурса?

$\boxed{9}$ *(1,5 балла)* Окружность радиуса 3,5 вписана в треугольник KLT и касается сторон KT и KL соответственно в точках A и B. Известно, что $TA : AK = 1 : 2$, $KB : BL = 2 : 3$. Найдите наибольшую сторону треугольника KLT.

или

в треугольнике PKT со сторонами $PK = 12$, $PT = 15$, $KT = 18$ проведена биссектриса PF. Окружность, описанная около треугольника PKF, пересекает сторону PT в точке M. Найдите периметр треугольника MFT.

$\boxed{\mathbf{10}}$ *(2 балла)* Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\frac{ax^2 + x - a - 1}{\sqrt{1 - x}} = 0$$

не имеет решений. В ответ запишите разность между наибольшим и наименьшим из таких значений.

или

найдите значение параметра a, при котором расстояние между точками, заданными на координатной плоскости системой

$$\begin{cases} y^2 - 4x + x^2 = 0 \\ 2y + ax - 3 = 0, \end{cases}$$

будет наибольшим.

Решение задач по математике первой части комплексного теста

$\boxed{\mathbf{1}}$ *(0,5 балла)* Вычислите: $58 \cdot \left(\left(2\frac{1}{14}\right)^{-2} - \left(1\frac{14}{15}\right)^{-2}\right)$.

Решение.

$$\left(2\frac{1}{14}\right)^{-2} = \left(\frac{14}{29}\right)^2,$$
$$\left(1\frac{14}{15}\right)^{-2} = \left(\frac{15}{29}\right)^2.$$

По формуле разности квадратов:

$$\left(\frac{14}{29}\right)^2 - \left(\frac{15}{29}\right)^2 = \left(\frac{14}{29} - \frac{15}{29}\right) \cdot \left(\frac{14}{29} + \frac{15}{29}\right) = -\frac{1}{29}.$$

Ответ: -2.

или

найдите значение выражения $(-6t)$, если $t = \dfrac{11}{6} : (2,65 : 2,5 - 1,1)$.

Решение.

$$2,65 : 2,5 - 1,1 = 265 : 250 - 1,1 = 1,06 - 1,1 = -0,04 = -\frac{1}{25}.$$

$$\frac{11}{6} : \left(-\frac{1}{25}\right) = -\frac{11 \cdot 25}{6}.$$

Тогда $-6t = 11 \cdot 25 = 275$.

Ответ: 275.

$\boxed{\mathbf{2}}$ *(0.5 балла)* Решите уравнение:

$$\frac{7}{x^2 + 3x - 4} - \frac{3x + 6}{x^2 + x - 2} = \frac{1}{1 - x}.$$

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите наименьший из них.

Решение. Заметим, что

$$x^2+3x-4=(x-1)(x+4),\ \ x^2+x-2=(x-1)(x+2).$$

Тогда

$$\frac{7}{(x-1)(x+4)}-\frac{3x+6}{(x-1)(x+2)}=-\frac{1}{x-1}.$$

Далее,

$$\begin{cases}\dfrac{7}{x+4}-\dfrac{3x+6}{x+2}=-1,\\ x\neq 1.\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\neq 1,\\ x\neq -2,\\ x\neq -4,\\ \dfrac{7}{x+4}-3=-1.\end{cases}$$

Данная система имеет единственное решение $x=-\dfrac{1}{2}$.

Ответ: $-\dfrac{1}{2}$.

или

решите неравенство

$$\left(\sqrt{x+2}+1\right)\cdot(7,3x-20)\leq 0.$$

В ответе укажите количество целых чисел, являющихся решениями неравенства.

Решение. На области допустимых значений $[-2;+\infty)$ имеем

$$\sqrt{x+2}+1\geq 1.$$

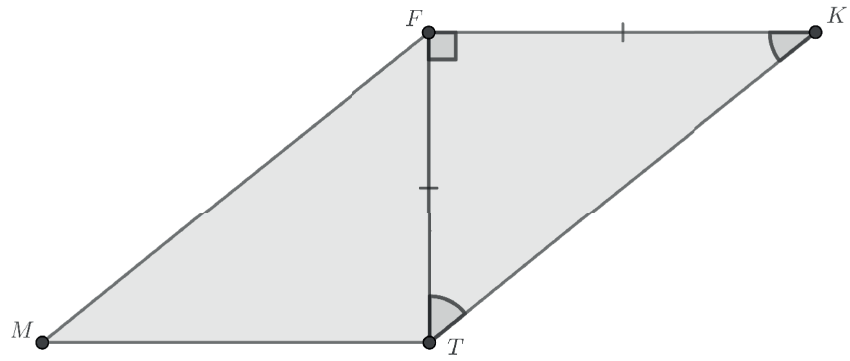
Разделим неравенство на $\sqrt{x+2}+1$, $7,3x-20\leq 0\Rightarrow x\leq 2\dfrac{54}{73}$.

Решениями неравенства являются числа из промежутка $\left[-2;2\dfrac{54}{73}\right]$. Целых чисел в этом промежутке 5.

Ответ: 5.

$\boxed{3}$ *(0,5 балла)* В параллелограмме $MFKT$ угол T равен $135°$, а диагональ FT перпендикулярна стороне FK, которая равна 14. Найдите площадь параллелограмма $MFKT$.

Решение.



Если $\angle MTK = 135°$, то $\angle FKT = 45°$. Тогда $\angle FTK = 180° - 90° - 45° = 45°$. Значит, $\triangle FTK$ – равнобедренный и $FT = FK = 14$.

Отрезок FT является высотой параллелограмма.

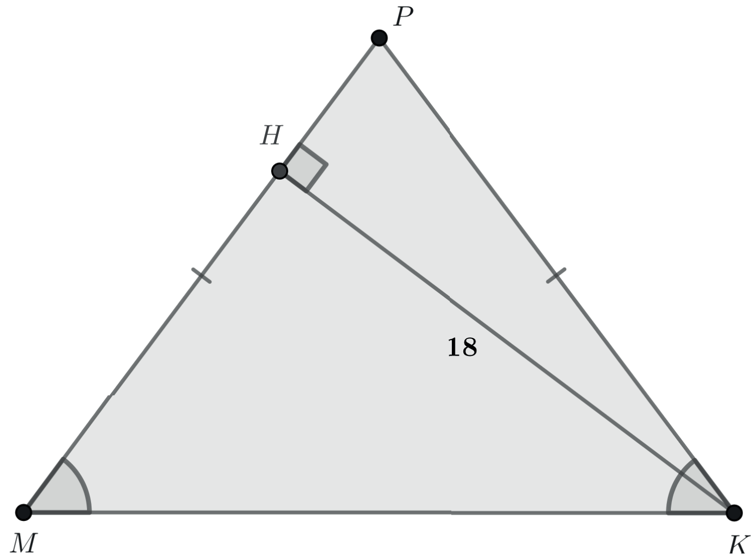
Получим $S_{MFKT} = FT \cdot FK = 14^2 = 196$.

Ответ: 196.

или

треугольник MPK — равнобедренный. Известно, что MK — основание, угол при котором равен $75°$. Найдите длину стороны MP, если высота, проведенная к этой стороне, равна 18.

Решение.



Так как $\triangle MPK$ – равнобедренный, то

$$\angle MPK = 180^\circ - 2 \cdot 75^\circ = 30^\circ.$$

Проведем высоту KH. В прямоугольном $\triangle PHK$ катет KH лежит против угла в 30°, значит, $PM = PK = 2 \cdot 18 = 36$.

Ответ: 36.

$\boxed{4}$ *(0,5 балла)* Ежемесячный доход семьи равен 95 000 руб. Известно, что 40% этой суммы составляет заработная плата Татьяны. В результате кризиса её заработная плата снизилась на 10%. На сколько процентов снизился общий доход семьи, если доходы остальных членов семьи не изменились?

Решение. Заработная плата Татьяны составляет $95\,000 \cdot 0,4 = 38\,000$ руб. Изменение ее заработной платы составит $38\,000 \cdot 0,1 = 3800$ руб. На эту же величину изменится доход семьи. Он снизится на $\dfrac{3800}{95\,000} \cdot 100\% = 4\%$.

Ответ: 4%.

или

Динара и Карим состязались в беге на 1 км. Динара обогнала Карима на 90 секунд, но если бы Карим бежал в полтора раза быстрее, то он обогнал бы Динару на 1 минуту. С какой скоростью бежала Динара? Ответ дайте в км/ч.

Решение. Пусть x – скорость Динары, y – скорость Карима в км/мин. Тогда

$$\frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{3}{2}.$$

Если Карим будет бежать в полтора раза быстрее, его скорость составит $1,5y$. Значит,

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{1,5y} = 1 \Rightarrow \frac{1}{x} - \frac{2}{3y} = 1.$$

Сложим полученные уравнения:

$$\frac{1}{y} - \frac{2}{3y} = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{15}{2}.$$

Тогда $\frac{1}{x} = \frac{1}{y} - \frac{3}{2} = 6 \Rightarrow x = \frac{1}{6}$ км/мин.

Выразим скорость в км/ч: $\frac{1}{6}$ км/мин составляет 10 км/ч.

Ответ: 10 км/ч.

$\boxed{5}$ *(1 балл)* Найдите сумму всех трёхзначных чисел, которые при делении на 3 дают остаток 1, а при делении на 4 — остаток 2.

Решение. Обозначим через A число, удовлетворяющее условию задачи. Тогда $A = 3k + 1, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow (A - 1) \vdots 3$; $A = 4p + 2, p \in \mathbb{Z} \Rightarrow (A - 2) \vdots 4$.

Тогда $(A+2) \vdots 12 \Rightarrow A = 12l - 2 = 12(l - 1) + 10 = 12s + 10, l, s \in \mathbb{Z}$.

Значит, нужно найти сумму трехзначных чисел, которые при делении на 12 будут давать остаток 10.

Определим их количество: $100 \leq 12s + 10 \leq 999 \Rightarrow 8 \leq s \leq 82$. Тогда всего подходящих чисел 75.

Эти числа образуют арифметическую прогрессию с разностью 12. Найдем ее сумму:

$$S = \frac{2 \cdot 106 + 74 \cdot 12}{2} \cdot 75 = 41\,250.$$

Ответ: 41 250.

или

Миша начал читать книгу. Каждый день он читал в два раза меньше страниц, чем в предыдущий, и прочитал книгу за шесть дней. Сколько страниц книги прочитал Миша за третий день, если в книге 189 страниц?

Решение. Числа, равные количеству страниц, которое Миша читал каждый день, образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \frac{1}{2}$. Пусть x — количество страниц, прочитанное в первый день. Тогда

$$189 = \frac{x \cdot (0,5^6 - 1)}{0,5 - 1} \Rightarrow x = \frac{189 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{64}} = 96.$$

Тогда в третий день Миша прочитал $96 \cdot \frac{1}{4} = 24$ страницы.

Ответ: 24.

$\boxed{6}$ *(1 балл)* Найдите сумму всех целых чисел, входящих в область определения функции

$$f(x) = \sqrt{9 - x \cdot |x|} + \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 3}{10x^2 - 11x - 62}}.$$

Решение. Так как $5 < 9$, то $\sqrt{5} < 3$. Тогда второе слагаемое существует при условии $10x^2 - 11x - 62 < 0$, откуда $x \in \left(-2; \frac{31}{10}\right)$.

Первое слагаемое существует при $9 - x \cdot |x| \geq 0$. Рассмотрим два случая.

При $x \geq 0$ имеем $9 - x^2 \geq 0$, откуда $x \in [-3; 3] \Rightarrow x \in [0; 3]$.

При $x < 0$ получим неравенство $9 + x^2 \geq 0$, которое справедливо при всех x. Тогда первое слагаемое существует при $x \in (-\infty; 3]$.

Значит, $f(x)$ определена на промежутке $(-2; 3]$. Сумма целых решений 5.

Ответ: 5.

или

найдите наибольшее значение функции $f(x) = 2 + \frac{1}{x+2}$ при условии, что аргумент принимает значения из области определения функции $g(x) = \sqrt{(x+5)(x+2)} + \sqrt{x+1}$.

Решение. Найдем область определения функции $g(x)$.

$$\begin{cases} x + 1 \geq 0, \\ (x+5)(x+2) \geq 0. \end{cases}$$

Получим, что $x \geq -1$. На этом промежутке функция $f(x)$ убывает. Значит, свое наибольшее значение она принимает в точке $x = -1$. Тогда наибольшее значение равно $f(-1) = 3$.

Ответ: 3.

$\boxed{7}$ *(1 балл)* Найдите значение выражения

$$\sqrt{18}\left(\sqrt{x}-3\right)\sqrt{2x+18+12\sqrt{x}}-6x$$

при $x = 0,15$.

Решение. Заметим, что

$$2x+18+12\sqrt{x} = 2(\sqrt{x}+3)^2.$$

Так как $\sqrt{x}$ принимает неотрицательные значения при всех допустимых x, то $\sqrt{2(\sqrt{x}+3)^2} = \sqrt{2}\cdot|\sqrt{x}+3| = \sqrt{2}\cdot(\sqrt{x}+3)$.

Тогда при $x \geq 0$

$$\sqrt{18}\left(\sqrt{x}-3\right)\cdot\sqrt{2}\cdot(\sqrt{x}+3)-6x = 6x-54-6x = -54.$$

Ответ: -54.

или

найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt{3}a-\left(1+3\sqrt{3}\right)\sqrt{ab}+3b}{\sqrt{a+9b-6\sqrt{ab}}}-\sqrt{b}$ при $a = 27$, $b = 5$.

Решение. При $a \geq 0$, $b \geq 0$ выражение в числителе дроби можно преобразовать следующим образом:

$$\sqrt{3}a-\left(1+3\sqrt{3}\right)\sqrt{ab}+3b = \sqrt{3}a-\sqrt{ab}-3\sqrt{3}\cdot\sqrt{ab}+3b =$$
$$= \sqrt{a}\left(\sqrt{3a}-\sqrt{b}\right)-3\sqrt{b}\left(\sqrt{3a}-\sqrt{b}\right) = \left(\sqrt{3a}-\sqrt{b}\right)\cdot\left(\sqrt{a}-3\sqrt{b}\right).$$

Выражение в знаменателе можно представить в виде квадрата разности:

$$a+9b-6\sqrt{ab} = \left(\sqrt{a}-3\sqrt{b}\right)^2.$$

Так как $a = 27, b = 5$, то $\sqrt{a} - 3\sqrt{b} = 3\sqrt{3} - 3\sqrt{5} < 0$. Поэтому $\sqrt{\left(\sqrt{a} - 3\sqrt{b}\right)^2} = 3\sqrt{b} - \sqrt{a}$.

Тогда частное равно

$$\frac{\left(\sqrt{3a} - \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} - 3\sqrt{b}\right)}{-\left(\sqrt{a} - 3\sqrt{b}\right)} = -\sqrt{3a} + \sqrt{b}.$$

Значение исходного выражения равно $-\sqrt{3a} = -\sqrt{27 \cdot 3} = -9$.

Ответ: -9.

$\boxed{8}$ *(1,5 балла)* Замените все буквы цифрами (одинаковые буквы — одинаковыми цифрами, разные буквы — разными), чтобы разность

ЛИЦЕЙ – ОГОНЬ

приняла наибольшее возможное значение. В ответе укажите это значение.

Решение. Чем больше уменьшаемое, тем больше разность. Наибольшее пятизначное число с различными цифрами — это 98 765.

Определим наименьшее возможное значение вычитаемого. На первую позицию нельзя поставить 0, поэтому $O = 1$. Все остальные цифры различны, значит, вычитаемое равно 10 123.

Тогда разность равна 88 642.

Ответ: 88 642.

или

в конкурсе по поеданию булочек участвовало 5 человек. Все они съели разное количество булочек, и каждому удалось съесть хотя бы одну. Когда каждого участника спросили, сколько булочек в сумме было съедено за время конкурса, они назвали различные числа от 11 до 15, причём известно, что занявший первое место ошибся на 1, занявший второе — на 2, третье — на 3, четвёртое — на 4, пятое — на 5 булочек. Сколько булочек съел победитель конкурса?

Решение. Количество булочек, которое могли съесть участники конкурса, не меньше чем $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$. Тогда меньше всего ошибся участник, назвавший число 15. Именно он занял первое место. Значит, всего было съедено 16 булочек.

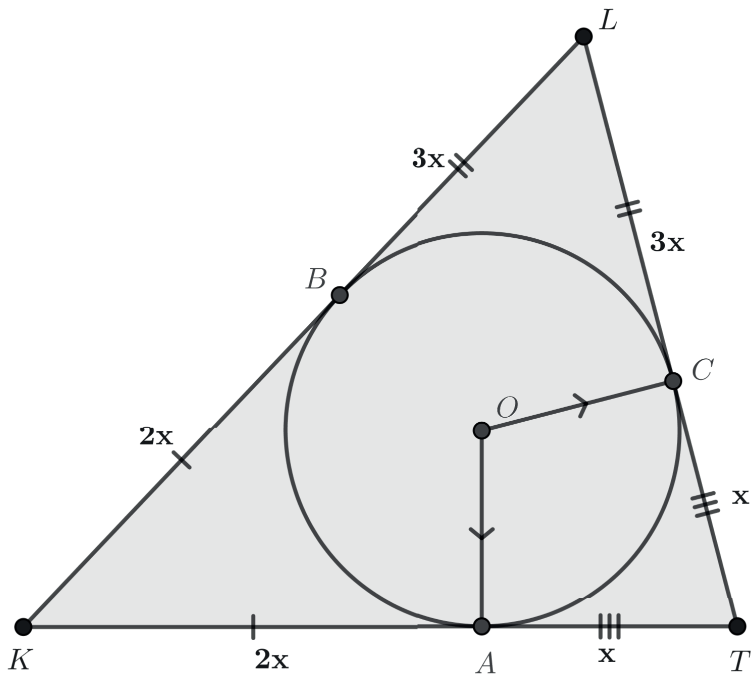
Так как все участники съели различное количество булочек и каждый съел хотя бы одну, то победитель не мог съесть меньше 5 булочек.

Если победитель съел 5 булочек, то всего было съедено 15. Если он съел 6 булочек, то всего их могло быть 16: $1 + 2 + 3 + 4 + 6$. Если победитель съел 7 и более булочек, то минимальная сумма не меньше $7 + 1 + 2 + 3 + 4 = 17 > 16$.

Ответ: 6.

$\boxed{9}$ *(1,5 балла)* Окружность радиуса 3,5 вписана в треугольник KLT и касается сторон KT и KL соответственно в точках A и B. Известно, что $TA : AK = 1 : 2$, $KB : BL = 2 : 3$. Найдите наибольшую сторону треугольника KLT.

Решение.



Пусть C — точка, в которой окружность касается стороны TL.

Пусть $AK = 2x$, $AT = x$ и $BK = 2y$, $BL = 3y$.

Отрезки касательных, проведенных из одной точки, равны, поэтому $BK = AK \Rightarrow x = y$.

Так как $BL = CL$, $AT = CT$, то $KT = 3x$, $KL = 5x$, $TL = 4x$.

Поскольку для сторон треугольника KLT выполняется соотношение $KL^2 = KT^2 + LT^2$, то это прямоугольный треугольник и $\angle KTL = 90°$.

Пусть O — центр вписанной окружности.

Тогда $OA \perp TK$, $OC \perp LT$ (радиусы, проведенные в точку касания). Значит, $OATC$ — прямоугольник. Так как $OC = OA$, то четырехугольник $OATC$ — квадрат.

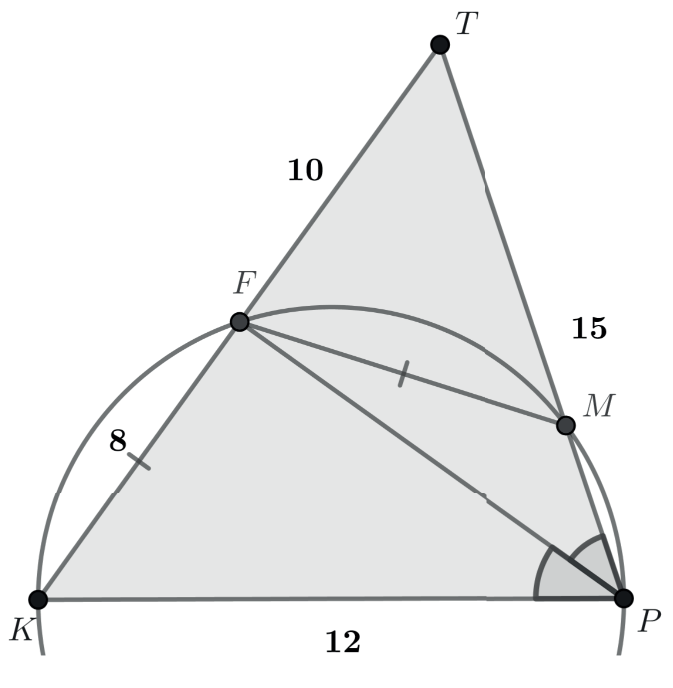
Получили, что $OA = 3,5 = x \Rightarrow KL = 5x = 17,5$.

Ответ: $17,5$.

или

в треугольнике PKT со сторонами $PK = 12$, $PT = 15$, $KT = 18$ проведена биссектриса PF. Окружность, описанная около треугольника PKF, пересекает сторону PT в точке M. Найдите периметр треугольника MFT.

Решение.



По свойству биссектрисы имеем

$$\frac{KF}{FT} = \frac{KP}{TP} = \frac{4}{5}.$$

Из равенства $KT = KF + FT = 18$ следует, что $KF = 8$, $FT = 10$.

По теореме об отрезках секущих, проведенных из одной точки, имеем: $FT \cdot KT = MT \cdot PT \Rightarrow MT = 12$.

Вписанные углы $\angle KPF$ и $\angle MPF$ равны, поэтому они опираются на равные хорды. Тогда $FM = 8$. Откуда $P_{MFT} = 10 + 8 + 12 = 30$.

Ответ: 30.

$\boxed{10}$ *(2 балла)* Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\frac{ax^2 + x - a - 1}{\sqrt{1 - x}} = 0$$

не имеет решений. В ответ запишите разность между наибольшим и наименьшим из таких значений.

Решение. Если $a = 0$, то $x = 1$ — корень числителя. Однако в этой точке знаменатель обращается в ноль.

При любом $a \neq 0$ уравнение $ax^2 + x - a - 1 = 0$ имеет корни, так как $D = 1 + 4a^2 + 4a = (2a + 1)^2 \geq 0$.

Тогда $x_1 = 1$, $x_2 = -\dfrac{a+1}{a}$. Чтобы исходное уравнение не имело решений, необходимо, чтобы $-\dfrac{a+1}{a} \geq 1$. Откуда $a \in [-0,5; 0)$.

Таким образом, $a \in [-0,5; 0]$.

Ответ: 0,5.

или

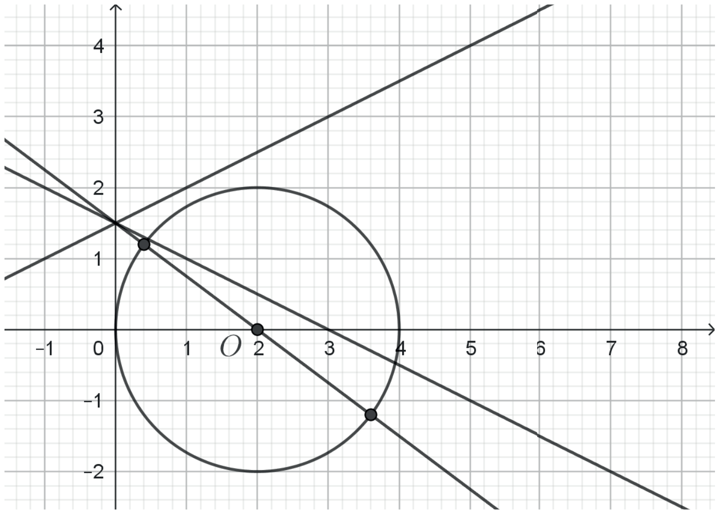
найдите значение параметра a, при котором расстояние между точками, заданными на координатной плоскости системой

$$\begin{cases} y^2 - 4x + x^2 = 0, \\ 2y + ax - 3 = 0, \end{cases}$$

будет наибольшим.

Решение. Первое уравнение системы – уравнение окружности: $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ с центром в точке $(2; 0)$ и радиусом 2. Второе уравнение задает пучок прямых (кроме вертикальной) $y = -\dfrac{a}{2}x + \dfrac{3}{2}$, проходящих через точку с координатами $\left(0; \dfrac{3}{2}\right)$.

Решения системы — координаты общих точек окружности и прямой. Расстояние между точками будет наибольшим, если точки будут диаметрально противоположны.



Тогда прямая $y = -\dfrac{a}{2}x + \dfrac{3}{2}$ должна проходить через центр окружности. Из уравнения $0 = -a + \dfrac{3}{2}$ получаем $a = 1,5$.

Ответ: $1,5$.

Лицей НИУ ВШЭ

Вторая часть комплексного теста в 10-й класс
для направлений «Информатика, инженерия и математика»,
«Экономика и математика»,«Математика»
Задания по **МАТЕМАТИКЕ 2023 ДЕМО**

Выполните задания (20 баллов)

$\boxed{\mathbf{1}}$ *(3 балла)* Решите неравенство

$$\frac{25+30x-54x^2}{\sqrt{1-x^6}} \geq 0.$$

ИЛИ

найдите все значения переменной x, при которых выражение

$$\frac{\sqrt{3+x-|-x-3|}}{\sqrt{x^2-6x+7}-\sqrt{7-x}}$$

не имеет смысла.

$\boxed{\mathbf{2}}$ *(3 балла)* Натуральное число называется палиндромом, если его десятичная запись одинаково читается слева направо и справа налево. Например, 12321, 12344321 – палиндромы. Найдите все четырехзначные палиндромы, делящиеся на 15.

ИЛИ

мотоциклисты Айрат и Виталий ездят по круговой трассе по часовой стрелке, причём скорость Айрата больше скорости Виталия на 30 км/ч. В какой-то момент, одновременно проезжая мимо плаката «Жми на газ!», они оба увеличили свою скорость на 20 км/ч. В следующий раз после этого Айрат обогнал Виталия возле того же плаката, проехав с момента ускорения ровно 4 круга. Найдите скорости мотоциклистов до того, как они решили ускориться.

$\boxed{3}$ *(4 балла)* Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Продолжения стороны CD за точку C и стороны AB за точку B пересекаются в точке N. Площадь треугольника ABD равна 2, площадь треугольника ABC равна 1, $AB = BN$. Диагонали BD и AC пересекаются в точке O.

А. Докажите, что BC – средняя линия треугольника AND.

Б. Найдите OD, если $BO = 0,5$.

ИЛИ

высота трапеции $ABCD$ равна 7. Известны длины оснований трапеции: $AD = 10$, $BC = 8$. Через точку E, лежащую на стороне CD, проведена прямая BE, которая пересекает диагональ AC в точке O так, что $AO : OC = 5 : 2$.

А. Докажите, что $CE : CD = 4 : 9$.

Б. Найдите площадь треугольника OEC.

$\boxed{4}$ *(5 баллов)* На координатной плоскости Oxy фигура задана системой неравенств:

$$\begin{cases} (|x| - 4)(y - x + 8) \leq 0, \\ y^2 + x^2 \leq 8|x|. \end{cases}$$

Изобразите эту фигуру и вычислите её площадь.

ИЛИ

дана функция $f(x) = |x + 2| + |2x - 6| - 8$. Изобразите на координатной плоскости графики функций $y = f(x)$ и $y = 7 - |x - t|$, где t — наименьшее значение функции $f(x)$. Вычислите площадь многоугольника, ограниченного данными графиками.

$\boxed{5}$ *(5 баллов)* Найдите все такие значения параметра a, для каждого из которых множество решений уравнения

$$\frac{\sqrt{x^2 + 2ax + a^2} + \sqrt{x^2 - 6ax + 9a^2} - 4a}{\sqrt{4 - x^2}} = 0$$

есть отрезок.

ИЛИ

при каких значениях параметра a уравнение

$$\frac{x^2 - 4a^2}{|x| + 2a} + \frac{x}{\sqrt{x^2}} + \frac{(\sqrt{x-a})^2}{x-a} = 0$$

имеет решения? В ответе укажите полученные значения a и соответствующие им решения.

Решение задач по математике второй части комплексного теста

$\boxed{1}$ *(3 балла)* Решите неравенство

$$\frac{25+30x-54x^2}{\sqrt{1-x^6}} \geq 0.$$

Решение.

$$\begin{cases} x^6-1<0, \\ 54x^2-30x-24 \leq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-1)(x+1)(x^4+x+1)<0, \\ x \in \left[\dfrac{5-5\sqrt{7}}{18}; \dfrac{5+5\sqrt{7}}{18}\right]. \end{cases}$$

Так как неполный квадрат суммы всегда принимает положительные значения, то

$$\begin{cases} x \in (-1;1), \\ x \in \left[\dfrac{5-5\sqrt{7}}{18}; \dfrac{5+5\sqrt{7}}{18}\right]. \end{cases}$$

Учтем, что $\dfrac{5+5\sqrt{7}}{18}-1=\dfrac{5\sqrt{7}-13}{18}>0$, так как $5\sqrt{7}>13$, а также, что $\dfrac{5-5\sqrt{7}}{18}+1=\dfrac{23-5\sqrt{7}}{18}>0$, так как $5\sqrt{7}<23$. Тогда $x \in \left[\dfrac{5-5\sqrt{7}}{18}; 1\right)$.

Ответ: $x \in \left[\dfrac{5-5\sqrt{7}}{18}; 1\right)$.

или

найдите все значения переменной x, при которых выражение

$$\frac{\sqrt{3+x-|-x-3|}}{\sqrt{x^2-6x+7}-\sqrt{7-x}}$$

не имеет смысла.

Решение. Выражение не имеет смысла, если

$$\left[\begin{array}{c} 3+x-|-x-3|<0, \\ x^2-6x+7<0, \\ x>7, \\ \sqrt{x^2-6x+7}=\sqrt{7-x}. \end{array}\right.$$

Рассмотрим отдельно каждое условие.

Неравенство вида $|f|>f$ равносильно неравенству $f<0$.

Тогда $3+x-|-x-3|<0 \Rightarrow |x+3|>x+3 \Rightarrow x<-3$.

Далее, $x^2-6x+7<0 \Rightarrow x\in(3-\sqrt{2};3+\sqrt{2})$.

Уравнение $\sqrt{x^2-6x+7}=\sqrt{7-x}$ равносильно системе

$$\begin{cases} x\le 7, \\ x^2-6x+7=7-x. \end{cases}$$

Откуда $x=0$ или $x=5$.

Объединим все множества. Тогда

$$x\in(-\infty;-3)\cup\{0\}\cup(3-\sqrt{2};3+\sqrt{2})\cup\{5\}\cup(7,+\infty).$$

Ответ: $x\in(-\infty;-3)\cup\{0\}\cup(3-\sqrt{2};3+\sqrt{2})\cup\{5\}\cup(7,+\infty)$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ *(3 балла)* Натуральное число называется палиндромом, если его десятичная запись одинаково читается слева направо и справа налево. Например, 12321, 12344321 – палиндромы. Найдите все четырехзначные палиндромы, делящиеся на 15.

Решение. Число делится на 15, значит, оно делится на 3 и на 5 (3 и 5 взаимно простые). Четырехзначный палиндром имеет вид $A=\overline{abba}$, где a,b – цифры. Если $A\,\vdots\,5$, то $a=0$ или $a=5$. Первый вариант не подходит, так как число не может начинаться с нуля. Значит, $a=5$.

Так как $A\,\vdots\,3$, то $(10+2b)\,\vdots\,3$. Подходят значения 1, 4 и 7.

Ответ: 5115, 5445, 5775.

ИЛИ

мотоциклисты Айрат и Виталий ездят по круговой трассе по часовой стрелке, причём скорость Айрата больше скорости Виталия на 30 км/ч. В какой-то момент, одновременно проезжая мимо плаката «Жми на газ!», они оба увеличили свою скорость на 20 км/ч. В следующий раз после этого Айрат обогнал Виталия возле того же плаката, проехав с момента ускорения ровно 4 круга. Найдите скорости мотоциклистов до того, как они решили ускориться.

Решение. Пусть v_A и v_B – скорости Айрата и Виталия после ускорения (в км/ч), l — длина трассы (в км). После ускорения за время t Айрат обогнал Виталия на 1 круг, значит, $l = (v_A - v_B)t \Rightarrow t = \dfrac{l}{30}$. За это же время Айрат проехал 4 круга, тогда $v_A = 4l : \dfrac{l}{30} \Rightarrow v_A = 120$.

До ускорения скорость Айрата была равна 100 км/ч, тогда скорость Виталия — 70 км/ч.

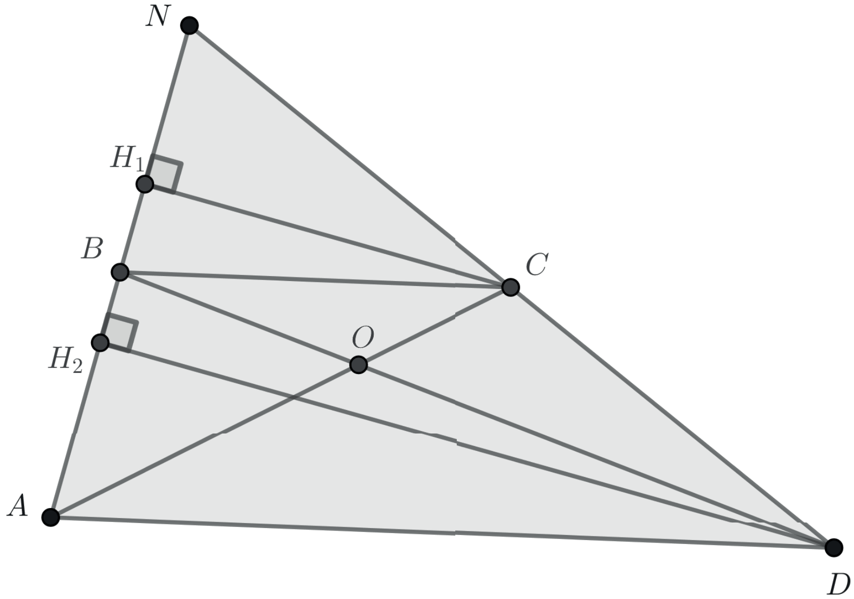
Ответ: 100 км/ч, 70 км/ч.

$\boxed{3}$ *(4 балла)* Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Продолжения стороны CD за точку C и стороны AB за точку B пересекаются в точке N. Площадь треугольника ABD равна 2, площадь треугольника ABC равна 1, $AB = BN$. Диагонали BD и AC пересекаются в точке O.

А.) Докажите, что BC – средняя линия треугольника AND.

Б.) Найдите OD, если $BO = 0,5$.

Решение.



А) Проведем высоты CH_1 и DH_2 к общей стороне треугольников ABC и ABD. Тогда $CH_1||DH_2$.

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ABC}} = \frac{DH_2}{CH_1} = 2.$$

Треугольники CNH_1 и DNH_2 подобны по двум углам. Значит, $\frac{NC}{ND} = \frac{CH_1}{DH_2} = \frac{1}{2}$. Тогда C – середина ND и BC является средней линией треугольника AND.

Б) Так как BC – средняя линия, то $BC||AD$. Треугольники BOC и AOD подобны по двум углам.

$$\frac{BO}{OD} = \frac{BC}{AD} = \frac{1}{2} \Rightarrow OD = 2BO = 1.$$

Ответ: 1.

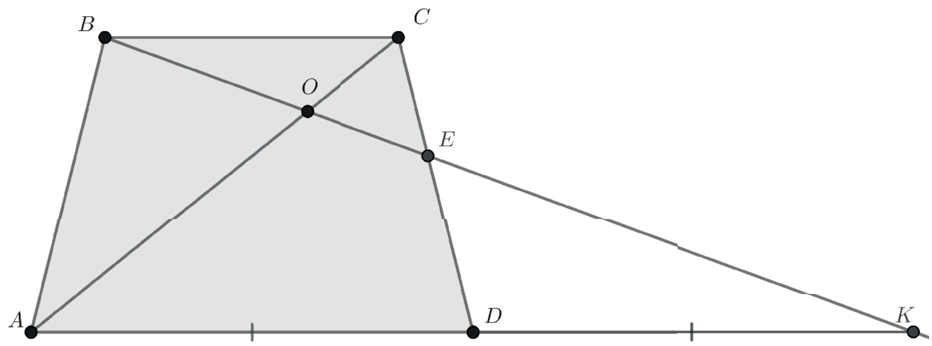
или

высота трапеции $ABCD$ равна 7. Известны длины оснований трапеции: $AD = 10$, $BC = 8$. Через точку E, лежащую на стороне CD, проведена прямая BE, которая пересекает диагональ AC в точке O так, что $AO : OC = 5 : 2$.

А) Докажите, что $CE : CD = 4 : 9$.

Б) Найдите площадь треугольника OEC.

Решение.



А) Пусть прямая BE пересекает AD в точке K. Тогда треугольники BOC и AOK подобны по двум углам,

$$\frac{BC}{AK} = \frac{CO}{AO} = \frac{2}{5} \Rightarrow AK = 20.$$

Так как $AK = AD + DK$, то $DK = 10$. Из подобия треугольников BCE и DKE следует:

$$\frac{BC}{DK} = \frac{CE}{DE} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{CE}{CD} = \frac{4}{9}.$$

Б) Треугольники COE и ACD имеют общий угол, поэтому

$$\frac{S_{OCE}}{S_{ACD}} = \frac{CO \cdot CE}{AC \cdot CD} = \frac{2}{7} \cdot \frac{4}{9} = \frac{8}{63}.$$

Так как $S_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 10 = 35$, то $S_{OCE} = \frac{8}{63} \cdot 35 = \frac{40}{9}$.

Ответ: $\frac{40}{9}$.

$\boxed{4}$ *(5 баллов)* На координатной плоскости Oxy фигура задана системой неравенств:

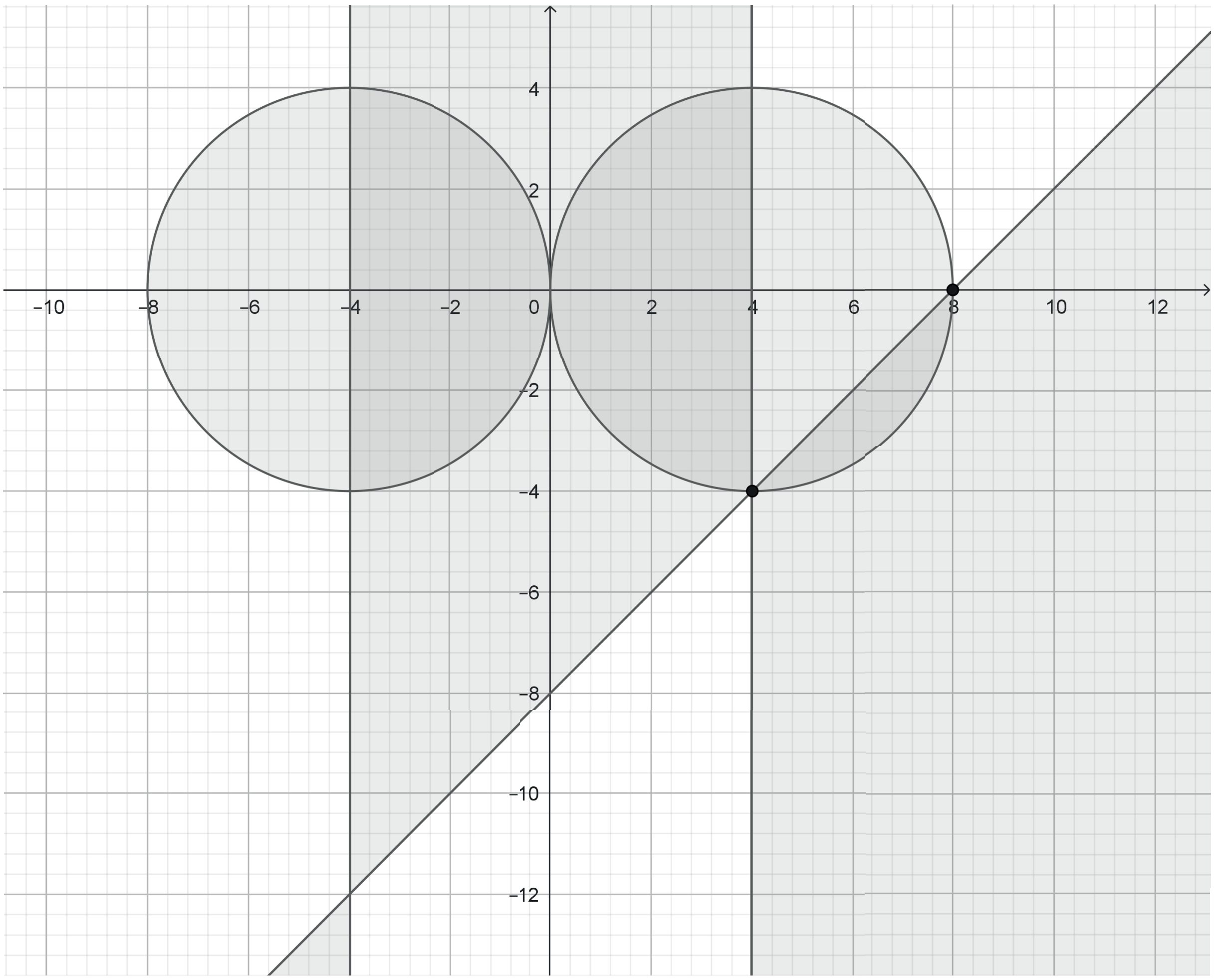
$$\begin{cases} (|x| - 4)(y - x + 8) \le 0, \\ y^2 + x^2 \le 8|x|. \end{cases}$$

Изобразите эту фигуру и вычислите её площадь.

Решение. Прямые $x = \pm 4$, $y = x - 8$ делят плоскость на шесть областей. Нужные области выделены на рисунке ниже. Уравнение $y^2 + x^2 = 8|x|$ задает на координатной плоскости две окружности $(x - 4)^2 + y^2 = 16$ и $(x + 4)^2 + y^2 = 16$, симметричные относительно оси ординат. Решения второго неравенства системы – точки на этих окружностях и внутри них. Найдем площадь фигуры:

$$S = \pi R^2 + \frac{1}{4}\pi R^2 - \frac{1}{2}R^2 = 20\pi - 8.$$

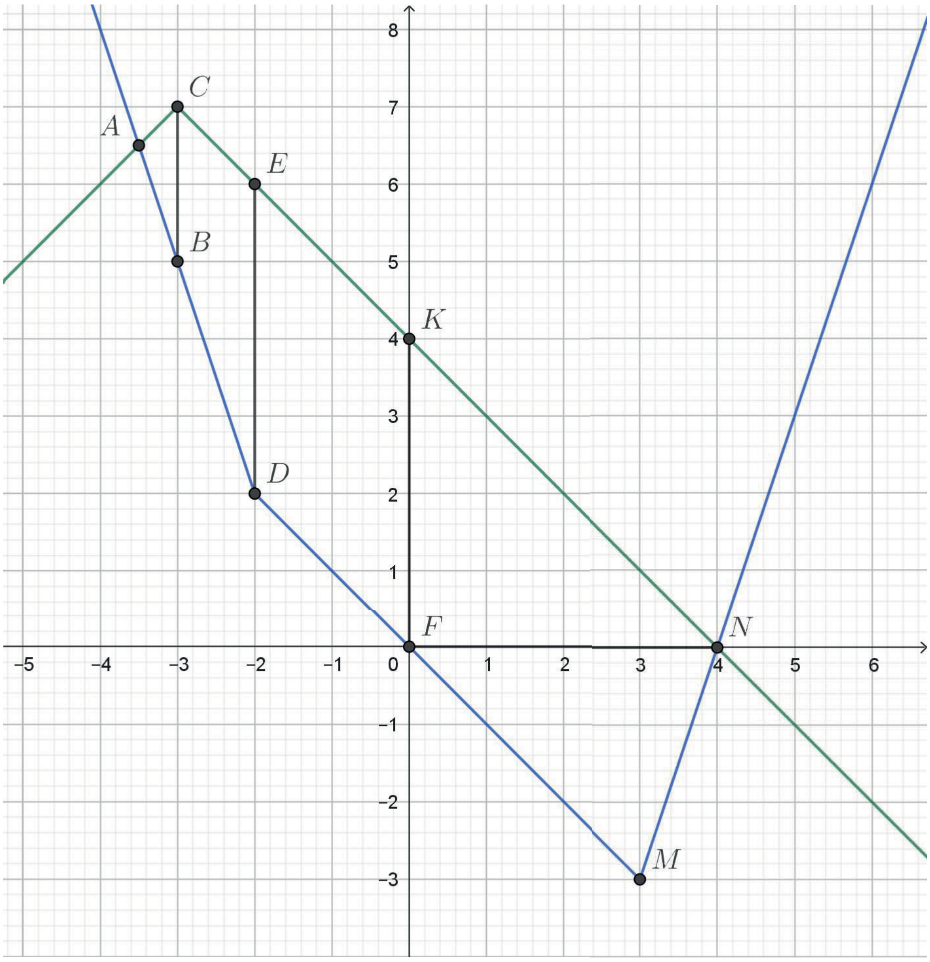
Ответ: $20\pi - 8$.



или

дана функция $f(x) = |x+2| + |2x-6| - 8$. Изобразите на координатной плоскости графики функций $y = f(x)$ и $y = 7 - |x - t|$, где t – наименьшее значение функции $f(x)$. Вычислите площадь многоугольника, ограниченного данными графиками.

Решение. Так как коэффициент при переменной x во втором модуле больше, чем коэффициент при переменной x в первом модуле, характер монотонности функции $f(x)$ на разных промежутках будет зависеть от второго модуля. При $x \geq 3$ функция $f(x)$ возрастает, а при $x \leq 3$ убывает. Значит, $x = 3$ – точка минимума. Наименьшее значение равно $f(3) = -3$.



Разделим фигуру, образованную пересечением ломаных, на части. Определим координаты точки A:

$$\begin{cases} y = 10 + x, \\ y = -4 - 3x. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3,5, \\ y = 6,5. \end{cases}$$

Тогда $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 2 = \dfrac{1}{2}$, $S_{BCED} = \dfrac{2+4}{2}\cdot 1 = 3$, $S_{DEKF} = 2\cdot 4 = 8$, $S_{KFN} = \dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 4 = 8$, $S_{FNM} = \dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 3 = 6$.

Площадь фигуры $S = 25,5$.

Ответ: 25,5.

$\boxed{5}$ *(5 баллов)* Найдите все такие значения параметра a, для каждого из которых множество решений уравнения

$$\frac{\sqrt{x^2+2ax+a^2}+\sqrt{x^2-6ax+9a^2}-4a}{\sqrt{4-x^2}}=0$$

есть отрезок.

Решение. Заметим, что подкоренные выражения в числителе дроби являются полными квадратами, поэтому

$$\frac{\sqrt{(x+a)^2}+\sqrt{(x-3a)^2}-4a}{\sqrt{4-x^2}}=0,$$

$$\frac{|x+a|+|x-3a|-4a}{\sqrt{4-x^2}}=0.$$

Нужно найти те значения параметра a, при которых выражение $|x+a|+|x-3a|-4a$ равно 0 при любых x.

Заметим, что $(x+a)-(x-3a)=4a$. Тогда

$$\begin{cases} x+a\geq 0, \\ x-3a\leq 0, \\ x\in(-2;2). \end{cases} \Rightarrow a\in\left(0;\frac{2}{3}\right).$$

Ответ: $a\in\left(0;\dfrac{2}{3}\right)$.

ИЛИ

При каких значениях параметра a уравнение

$$\frac{x^2-4a^2}{|x|+2a}+\frac{x}{\sqrt{x^2}}+\frac{(\sqrt{x-a})^2}{x-a}=0$$

имеет решения? В ответе укажите полученные значения a и соответствующие им решения.

Решение. Преобразуем левую часть уравнения

$$\begin{cases} \dfrac{(|x|-2a)(|x|+2a)}{|x|+2a} + \dfrac{x}{|x|} + \dfrac{x-a}{x-a} = 0, \\ x > a. \end{cases}$$

Тогда можем записать:

$$\begin{cases} x > a, \\ |x| + 2a \neq 0, \\ |x| - 2a + \dfrac{x}{|x|} + 1 = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим два случая. При $x > 0$ имеем:

$$\begin{cases} x > 0, \\ x > a, \\ x + 2a \neq 0, \\ x - 2a + 1 + 1 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2a - 2, \\ 2a - 2 > 0, \\ 2a - 2 + 2a \neq 0, \\ 2a - 2 > a; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2a - 2, \\ a > 2. \end{cases}$$

При $x < 0$ получим:

$$\begin{cases} x < 0, \\ x > a, \\ -x + 2a \neq 0, \\ -x - 2a - 1 + 1 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2a, \\ -2a < 0, \\ -2a > a, \\ -2a + 2a \neq 0. \end{cases}$$

Эта система решений не имеет ни при каких a. Значит, при $a > 2$ решение $x = 2a - 2$.

Ответ: при $a > 2$ решение $x = 2a - 2$.

1. Тождественные преобразования и вычисления

$\forall x, y \in \mathbb{R} \ \ \forall a, b > 0$

$\boxed{\mathbf{1}}$ $a^0 = 1.$

$\boxed{\mathbf{2}}$ $a^x \cdot a^y = a^{x+y}.$

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}.$

$\boxed{\mathbf{4}}$ $(a^x)^y = a^{xy}.$

$\boxed{\mathbf{5}}$ $(ab)^x = a^x b^x.$

$\boxed{\mathbf{6}}$ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}.$

$\boxed{\mathbf{7}}$ $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}.$

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$

$\boxed{\mathbf{8}}$ $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b).$

$\boxed{\mathbf{9}}$ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$

$\boxed{\mathbf{10}}$ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$

$\boxed{\mathbf{11}}$ $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b).$

$\boxed{\mathbf{12}}$ $(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b).$

$\boxed{\mathbf{13}}$ $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2).$

$\boxed{\mathbf{14}}$ $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2).$

$\forall a, b \geq 0$

$\boxed{\mathbf{15}}$ $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$

$\boxed{\mathbf{16}}$ $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}},\ b \neq 0.$

$\boxed{\mathbf{17}}$ $(\sqrt{a})^2 = a$ при $a \geq 0.$

$\boxed{\mathbf{18}}$ $\sqrt{a^2} = |a|$ при любых $a \in \mathbb{R}.$

19

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0; \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

20 Если x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Пример 1. Вычислите $\left(\dfrac{(2,7-0,8)\cdot 2\frac{1}{3}}{(5,2-1,4):\frac{3}{70}} + 0,125\right) : 2\frac{1}{2} + 0,43.$

Решение. 1) $(2,7-0,8)\cdot 2\frac{1}{3} = 1,9\cdot 2\frac{1}{3} = \frac{19}{10}\cdot\frac{7}{3} = \frac{133}{30}$;

2) $(5,2-1,4) : \frac{3}{70} = 3,8\cdot\frac{70}{3} = \frac{19}{5}\cdot\frac{70}{3} = \frac{1330}{15}$;

3) $\frac{133}{30} : \frac{1330}{15} = \frac{133}{30}\cdot\frac{15}{1330} = \frac{1}{20}$;

4) $\frac{1}{20} + 0,125 = \frac{1}{20} + \frac{1}{8} = \frac{2}{40} + \frac{5}{40} = \frac{7}{40}$;

5) $\frac{7}{40} : 2\frac{1}{2} = \frac{7}{40} : \frac{5}{2} = \frac{7}{40}\cdot\frac{2}{5} = \frac{14}{200} = \frac{7}{100} = 0,07$;

6) $0,07 + 0,43 = 0,5$.

Ответ: 0,5.

Пример 2. Вычислите

$$\frac{49\cdot\sqrt{3,7\cdot 1,2}\left(\sqrt{\frac{3,7}{1,2}} - \sqrt{\frac{1,2}{3,7}}\right)}{\sqrt{(3,7+1,2)^2 - 4\cdot 3,7\cdot 1,2}}.$$

Решение. 1) $\sqrt{3,7\cdot 1,2}\left(\sqrt{\frac{3,7}{1,2}} - \sqrt{\frac{1,2}{3,7}}\right) = \sqrt{3,7\cdot 1,2}\cdot\sqrt{\frac{3,7}{1,2}} -$

$-\sqrt{3,7\cdot 1,2}\cdot\sqrt{\frac{1,2}{3,7}} = \frac{\sqrt{3,7}\sqrt{1,2}\sqrt{3,7}}{\sqrt{1,2}} - \frac{\sqrt{1,2}\sqrt{3,7}\sqrt{1,2}}{\sqrt{3,7}} =$

$= (\sqrt{3,7})^2 - (\sqrt{1,2})^2 = 3,7 - 1,2 = 2,5;$

2) $\sqrt{(3,7+1,2)^2 - 4 \cdot 3,7 \cdot 1,2} =$

$= \sqrt{3,7^2 + 2 \cdot 3,7 \cdot 1,2 + 1,2^2 - 4 \cdot 3,7 \cdot 1,2} =$

$= \sqrt{3,7^2 - 2 \cdot 3,7 \cdot 1,2 + 1,2^2} = \sqrt{(3,7-1,2)^2} = \sqrt{2,5^2} = 2,5;$

3) $\dfrac{2,5}{2,5} = 1.$

Ответ: 49.

Пример 3. Вычислите $\sqrt{2}(4+\sqrt{15})(\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{8-2\sqrt{15}}.$

Решение. 1) $\sqrt{8-2\sqrt{15}} = \sqrt{5+3-2\sqrt{15}} =$

$= \sqrt{(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{5}\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2} = |\sqrt{5}-\sqrt{3}| =$

$= \sqrt{5} - \sqrt{3};$

2) $(\sqrt{10}-\sqrt{6})(\sqrt{5}-\sqrt{3}) = (\sqrt{2\cdot 5} - \sqrt{2\cdot 3})(\sqrt{5}-\sqrt{3}) =$

$= \sqrt{2}(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3}) = \sqrt{2}(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2 =$

$= \sqrt{2}((\sqrt{5})^2 - 2\sqrt{5}\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2) = \sqrt{2}(8-2\sqrt{15});$

3) $(4+\sqrt{15})\sqrt{2}(8-2\sqrt{15}) = (4+\sqrt{15})\sqrt{2}\cdot 2(4-\sqrt{15}) =$

$= 2\sqrt{2}(4+\sqrt{15})(4-\sqrt{15}) = 2\sqrt{2}(4^2 - (\sqrt{15})^2) =$

$= 2\sqrt{2}(16-15) = 2\sqrt{2};$

4) $\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 4.$

Ответ: 4.

Пример 4. Сократите дробь

$$\frac{x^2+5ax-6a^2}{x^2-3ax+2a^2}.$$

Решение. 1. Посмотрим на выражение $x^2+5ax-6a^2$ как на квадратный трехчлен и найдем его корни. Найдем его дискриминант:

$$D = (5a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6a^2) = 25a^2 + 24a^2 = 49a^2,$$

а затем применим формулу для корней квадратного уравнения

$$x_1 = \frac{-5a + 7a}{2} = a;\ x_2 = \frac{-5a - 7a}{2} = -6a.$$

Следовательно, $x^2 + 5ax - 6a^2 = (x - a)(x + 6a)$.

2. Аналогично $x^2 - 3ax + 2a^2 = (x - a)(x - 2a)$.

3. $\dfrac{x^2 + 5ax - 6a^2}{x^2 - 3ax + 2a^2} = \dfrac{(x - a)(x + 6a)}{(x - a)(x - 2a)} = \dfrac{x + 6a}{x - 2a}$.

Ответ: $\dfrac{x + 6a}{x - 2a}$.

Пример 5. Найдите значение выражения

$$\Big(-1\frac{3}{7} \cdot a^2 b\Big)^3 \cdot \Big(\frac{49\,b}{a^3}\Big)^2 \cdot \frac{1}{b^5}$$

при $a = -2,07$, $b = -\dfrac{3}{5}$.

Решение. Преобразуем выражение:

$$\Big(-1\frac{3}{7} \cdot a^2 b\Big)^3 \cdot \Big(\frac{49\,b}{a^3}\Big)^2 \cdot \frac{1}{b^5} = \Big(-\frac{10}{7}\Big)^3 a^6 b^3 \cdot \frac{49^2 b^2}{a^6} \cdot \frac{1}{b^5} =$$

$$= -\frac{10^3 \cdot 7^4 a^6 b^5}{7^3 a^6 b^5} = -7000.$$

Ответ: -7000.

Пример 6. Упростите выражение

$$\left(\frac{x^2}{x^2 + xy + y^2} - \left(\frac{x}{x - y} - \frac{xy(x + y)}{x^3 - y^3}\right)\right) : \frac{x^2 y}{x^2 - y^2} + \frac{x + y}{x^2 + xy + y^2}$$

и найдите его значение при $x = 1,5$, $y = \dfrac{2}{3}$.

Решение. Преобразуем выражение во внутренней скобке:

$$\frac{x}{x-y}-\frac{xy(x+y)}{x^3-y^3}=$$

$$=\frac{x(x^2+xy+y^2)-xy(x+y)}{(x-y)(x^2+xy+y^2)}=$$

$$=\frac{x^3+x^2y+xy^2-x^2y-xy^2}{(x-y)(x^2+xy+y^2)}=$$

$$=\frac{x^3}{(x-y)(x^2+xy+y^2)}.$$

Тогда все выражение в скобке можно упростить:

$$\frac{x^2}{x^2+xy+y^2}-\frac{x^3}{(x-y)(x^2+xy+y^2)}=$$

$$=\frac{x^3-x^2y-x^3}{(x-y)(x^2+xy+y^2)}=\frac{-x^2y}{(x-y)(x^2+xy+y^2)}.$$

Заменим деление умножением:

$$\frac{-x^2y}{(x-y)(x^2+xy+y^2)}\cdot\frac{(x-y)(x+y)}{x^2y}=\frac{-(x+y)}{x^2+xy+y^2}.$$

Значение выражения будет равно 0:

$$\frac{-(x+y)}{x^2+xy+y^2}+\frac{x+y}{x^2+xy+y^2}=0.$$

Ответ: 0.

Задачи для самостоятельного решения

Группа А

$\boxed{1}$ Вычислите $5,85:0,25-4,56\cdot 0,8$.

$\boxed{2}$ Вычислите $(0,894:0,3+6,4)\cdot 2,1+0,11$.

$\boxed{3}$ Вычислите $\left(5\frac{1}{4}-14,75\right):0,4-3,37$.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Вычислите $\left(2\dfrac{3}{11}-3\dfrac{4}{121}\right):\dfrac{10}{5,86+115\dfrac{7}{50}}$.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Вычислите $0,47\cdot 2,34-8,37\cdot 2\dfrac{2}{3}$.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Вычислите $\dfrac{9,8^3-7,2^3}{1,3}+14,4\cdot 9,8$.

$\boxed{\mathbf{7}}$ Вычислите $\dfrac{76,3^3-23,7^3}{52,6}+23,7\cdot 76,3$.

$\boxed{\mathbf{8}}$ Вычислите $\dfrac{(-9)^5\cdot 4^4}{6^8}$.

$\boxed{\mathbf{9}}$ Вычислите $\dfrac{(-5)^{11}\cdot(-2)^9}{10^{12}}$.

$\boxed{\mathbf{10}}$ Найдите значение выражения

$$27\,x^3+27\,x^2y+9\,xy^2+y^3$$

при $x=1,23$; $y=-2,69$.

$\boxed{\mathbf{11}}$ Найдите значение выражения

$$\frac{(11,2)^8-(\frac{1}{5})^8}{\left((11,2)^4-(\frac{1}{5})^4\right)\cdot\left((11,2)^3+(11,2)^2\cdot\frac{1}{5}+11,2\cdot\frac{1}{25}+\frac{1}{125}\right)}.$$

$\boxed{\mathbf{12}}$ Найдите значение выражения $5x^2-7x-4$ при $x=\dfrac{7-\sqrt{129}}{10}$.

$\boxed{\mathbf{13}}$ Вычислите

$$\frac{3}{\sqrt{2}-1}-\frac{\sqrt{2}(6-3\sqrt{8})}{2}.$$

$\boxed{\mathbf{14}}$ Вычислите

$$\frac{\sqrt{5}(3\sqrt{125}-10)}{5}+\frac{8}{\sqrt{5}-1}.$$

$\boxed{\mathbf{15}}$ Вычислите

$$\left(\frac{1}{3-2\sqrt{5}}-\frac{1}{3+2\sqrt{5}}\right)\cdot\sqrt{605}.$$

16 Вычислите

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-2}+\frac{2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)\cdot(2\sqrt{3}+9).$$

17 Вычислите

$$\frac{\sqrt{48}-\sqrt{75}+\sqrt{27}}{\sqrt{108}+\sqrt{12}}.$$

18 Вычислите

$$\frac{\sqrt{50}-\sqrt{72}+\sqrt{18}}{\sqrt{162}-\sqrt{128}}.$$

19 Вычислите

$$\frac{6\sqrt{2}+2\sqrt{6}}{3+\sqrt{3}}\cdot 2\sqrt{2}.$$

20 Вычислите

$$\frac{5+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}+\frac{5-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}.$$

21 Вычислите

$$(\sqrt{28}-\sqrt{252}+2\sqrt{63}):\sqrt{7}.$$

22 Найдите значение выражения

$$(\sqrt{21}-2)\cdot\sqrt{25+2\sqrt{84}}.$$

23 Найдите значение выражения

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{6+\sqrt{35}}\cdot\frac{\sqrt{125}-\sqrt{343}}{12+\sqrt{35}}.$$

24 Найдите значение выражения

$$\frac{(\sqrt{17}-2)\cdot(\sqrt{34}+\sqrt{8}+\sqrt{17}+2)}{\sqrt{2}+1}.$$

25 Упростите выражение

$$\left(\frac{12-y}{6y-36}-\frac{6}{y^2-6y}\right)\cdot\left(\frac{5y^2+30y}{36-y^2}-\frac{y}{y-6}\right).$$

26 Найдите значение выражения

$$\frac{a^3-3ab\,(a-b)-b^3}{a^2-b\,(2a-b)}:\frac{(a+b)^2-ab}{a^4-ab^3}$$

при $a=3,35$; $b=2,35$.

27 Найдите значение выражения

$$\left(\frac{ab}{b-a}+b\right):\left(\frac{ab}{a-b}+a\right),$$

если $\dfrac{a}{b}=0,2$.

28 Упростите выражение

$$\frac{4}{3x+1}-\left(\frac{2x}{3x+1}-\frac{2x}{3x-1}\right):\frac{x-3x^2}{9x^2-6x+1}+x^2$$

и найдите его числовое значение при $x=2,5$.

29 Упростите выражение

$$\left(x-\frac{x^3+8}{x^2+2x}\right)\cdot\frac{4x^2}{(x-2)^2}-\frac{5x+6}{x-2}$$

и найдите его числовое значение при $x=5,2$.

30 Упростите выражение

$$\frac{3x+21}{x+9}+\left(\frac{x+7}{x^2-18x+81}+\frac{x+5}{x^2-81}\right):\frac{(x+3)^2}{3(x-9)^2}.$$

31 Упростите выражение

$$\frac{x-1}{x+1} : \left(\frac{3x+1}{2x^2+4x+2} - \frac{1}{x+1}\right) - 2(x-5).$$

32 Упростите выражение

$$\left(\frac{x}{x-4} - \frac{x+1}{x^2-16} - \frac{x}{x+4}\right) : \frac{7x-1}{x^2-16}.$$

33 Упростите выражение

$$\frac{x^3+2x^2}{x-2} : \left(\frac{2}{x+2} + \frac{x^2+4}{x^2-4} - \frac{2}{2-x}\right).$$

34 Упростите выражение

$$\left(\frac{x}{x-3} + \frac{5x-6}{3x-x^2} - \frac{1}{x}\right) : \frac{x^3-9x}{x+3}.$$

35 Упростите выражение

$$\left(1 - \frac{x-1}{x^2} - \frac{1}{x^3+x^2}\right) : \frac{x^2}{2x^2+4x+2}.$$

36 Упростите выражение

$$\frac{x^2}{3-6x+3x^2} : \left(\frac{x+1}{x^2} - \frac{1}{x^2-x^3} + 1\right).$$

и найдите его числовое значение при $x = -9$.

Группа В

37 Найдите значение a, при котором равенство

$$\frac{8x-35a-3}{15a}=\left(\frac{7}{3}+\frac{1}{5a}\right)(x-1)+\frac{x}{3}$$

выполняется при любом x.

38 Найдите числа a и b, при которых равенство

$$(3x+4)^2=(3b-4a)\cdot x^2+\frac{12}{b}(17-a)\cdot x+16$$

является верным для всех значений x.

39 Найдите числа a и b из тождества

$$\frac{3x+11}{x^2+4x-21}=\frac{a}{x+7}+\frac{b}{x-3}.$$

40 Найдите числа a, b и c из тождества

$$\frac{1}{x^3+x^2-2x}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x+2}.$$

41 Найдите наибольшее значение выражения

$$4y(5x-y)-(5x-1)(5x+1)+8.$$

42 При каких натуральных значениях n выражение $\dfrac{3n+8}{n+1}$ является целым числом?

43 Известно, что $\dfrac{6y-5x}{5y+4x}=\dfrac{1}{2}$. Найдите значение выражения $\dfrac{11x-3y}{5x+y}$.

44 Найдите значение выражения

$$\sqrt{7,32+2\cdot\sqrt{7,32-1}}\cdot(\sqrt{6,32}-1).$$

45 Найдите значение выражения

$$\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{57} + \sqrt{69} + \sqrt{123}}{\sqrt{41} + \sqrt{19} + \sqrt{23}}.$$

46 Найдите значение выражения

$$\frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{x+99} + \sqrt{x+98}}$$

при $x = 0,01$.

47 Найдите значение выражения

$$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{100} + \sqrt{99}}.$$

48 Найдите значение выражения

$$\frac{4 \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}}}{\sqrt{7 - \sqrt{40}} - \sqrt{7 + \sqrt{40}}}.$$

49 Найдите значение выражения $\sqrt{a + 2 - 2\sqrt{a+1}}$ при $a = -0,03$.

50 Найдите значение выражения $a^2 + \dfrac{1}{a^2}$, если $a - \dfrac{1}{a} = 7$.

51 Найдите значение выражения $a^4 + \dfrac{1}{a^4}$, если известно, что

$$a - \frac{1}{a} = \frac{3\sqrt{7}}{7}.$$

52 Известно, что $a + b + c = 12$ и $ab + bc + ca = -15$. Найдите $a^2 + b^2 + c^2$.

53 Разложите многочлен $x^4 + 64$ на множители.

54 Докажите, что $2022^{2023} - 2019^{2023}$ делится на 3.

55 Докажите, что при четном натуральном n разность $9^n - 5^n$ делится на 56.

2. Задачи на проценты

Один процент от числа — это одна сотая часть этого числа. Один процент обозначается 1%. Чтобы найти 17% от числа 25, необходимо вычислить $\frac{17}{100} \cdot 25$:

$$\frac{17}{100} \cdot 25 = \frac{17 \cdot 25}{100} = \frac{425}{100} = 4,25.$$

То есть 17% от числа 25 составляют $4,25$.

Примером обратной задачи к задаче нахождения процента от числа является следующая задача: *известно, что 45% некоторого числа равны 12. Найдите это число.* Обозначив искомое число буквой X и используя определение процента, запишем $\frac{45}{100} \cdot X = 12$.

Тогда $\frac{45 \cdot X}{100} = 12$, откуда $45 \cdot X = 12 \cdot 100$, $X = \frac{1200}{45}$, $X = \frac{80}{3}$, $X = 26\frac{2}{3}$.

Доля числа X в числе Y — это отношение $\frac{X}{Y}$. Данная величина не имеет размерности. Она показывает, какую часть от числа Y составляет число X. Если мы хотим выразить долю в процентах, то нужно умножить отношение $\frac{X}{Y}$ на 100%.

Пример 1. Товар стоил 1200 руб. Его цена сначала повысилась на 10%, затем еще на 15%, после чего снизилась на 5%. Сколько теперь стоит этот товар?

Решение. Первоначальная цена товара 1200 руб. Если она повышается на 10%, то новая цена станет равной:

$$1200 + \frac{10}{100} \cdot 1200 = 1320.$$

Далее новая цена повышается на 15%:

$$1320 + \frac{15}{100} \cdot 1320 = 1518.$$

Теперь эта цена уменьшается на 5%:

$$1518 - \frac{5}{100} \cdot 1518 = 1442,1.$$

Ответ: 1442,1 руб.

Пример 2. Цена на электрический чайник была повышена на 16% и составила 3480 руб. Сколько рублей стоил чайник до повышения цены?

Решение. Пусть X — первоначальная цена чайника. Далее, 16% от числа X — это $\frac{16}{100} \cdot X$. Если мы говорим про увеличение первоначальной цены на 16%, то новая цена составит:

$$X + \frac{16}{100} \cdot X = 3480.$$

Далее остается решить это уравнение:

$$X\left(1 + \frac{16}{100}\right) = 3480, \;\; X\left(1 + \frac{4}{25}\right) = 3480, \;\; X \cdot \frac{29}{25} = 3480,$$

$$X \cdot 29 = 3480 \cdot 25, \;\; X = \frac{3480 \cdot 25}{29}, \;\; X = 3000.$$

Ответ: 3000 руб.

Пример 3. В связи с повышением разряда рабочий стал вместо 4800 руб. получать 6000 руб. На сколько процентов повысилась зарплата рабочего?

Решение. Пусть $X > Y$. Если мы хотим сказать, на сколько процентов число X больше, чем число Y, то мы вычисляем значение следующего выражения:

$$\frac{X - Y}{Y} \cdot 100\%.$$

Если мы хотим сказать, на сколько процентов число Y меньше, чем число X, то

$$\frac{X - Y}{X} \cdot 100\%.$$

Мы делим разность на то, с чем сравниваем.

В этой задаче нас спрашивают, на сколько процентов 6000 больше, чем 4800, на сколько процентов рабочий получает больше, чем он получал ранее:

$$\frac{6000 - 4800}{4800} \cdot 100\% = 25\%.$$

Ответ: 25%.

Задачи для самостоятельного решения

Группа А

$\boxed{1}$ В июне брюки в магазине стоили 2600 руб. В июле их стоимость увеличилась на 20%, а в августе — ещё на 20%. Сколько рублей в результате стоят брюки?

$\boxed{2}$ Число увеличили на 10%, а затем уменьшили на 60%. Получили 11. Найдите число.

$\boxed{3}$ Стоимость товара вместе с доставкой составляет 3942 руб., причем стоимость доставки составляет 8% от стоимости самого товара. Определите, сколько рублей стоит товар без доставки.

$\boxed{4}$ Ноутбук стоил 32 000 руб. После повышения цены он стал стоить 40 000 руб. На сколько процентов была повышена цена?

$\boxed{5}$ Есть 300 граммов 20%-ного раствора соли. Сколько граммов воды нужно добавить, чтобы получить 8%-ный раствор?

$\boxed{6}$ Стипендия Маши составляет 80% от стипендии Нади. Сколько процентов от стипендии Маши составляет стипендия Нади?

$\boxed{7}$ Оптовая цена учебника 170 руб. Розничная цена на 20% выше оптовой. Какое наибольшее число таких учебников можно купить по розничной цене на 7000 руб.?

$\boxed{8}$ Пирожок стоит 12 руб. При покупке более 20 пирожков продавец делает скидку в размере 5% от стоимости всей покупки. Покупатель купил 30 пирожков. Сколько рублей он заплатил за покупку?

9 Для приготовления яблочного варенья было взято 2 кг сахара. Сколько килограммов яблок было взято, если известно, что они составили 60% от массы варенья?

10 Свитер при распродаже уценили на 40%, при этом он стал стоить 990 руб. Сколько рублей стоил свитер до распродажи?

11 В коробке синие и красные шары. Известно, что количество красных шаров составляет 40% от количества синих. 30% красных шаров заменили на синие. Сколько процентов от общего числа шаров составляют теперь красные шары?

12 Цена товара выросла на 5%, затем понизилась на 20%, затем вновь выросла на 15%. На сколько процентов в итоге изменилась цена товара?

13 Крышка на 20% дешевле сковородки. Сковородка подорожала на 5%, цена крышки при этом не изменилась. На сколько процентов подорожал комплект «сковородка с крышкой»?

14 Турист прошел 70% пути, а затем 10% оставшегося пути. После этого ему еще осталось пройти 5 км 400 м. Сколько километров уже прошел турист?

15 Книга на 70% дороже календаря. Цена книги увеличилась на 10%, а общая стоимость книги и календаря уменьшилась на 5%. На сколько процентов снизилась цена календаря?

16 За первый день турист прошел 30% всего пути, а за третий — 60% пути, пройденного за первые два дня вместе. Сколько процентов всего пути прошел турист за второй день, если известно, что за три дня он преодолел весь путь?

17 Скорость автомобиля на первой половине пути на 20% больше его скорости на второй половине пути. На сколько процентов скорость автомобиля на второй половине пути меньше средней скорости автомобиля на всём пути? Ответ округлите до целых.

18 В прямоугольном треугольнике один катет на 25% меньше другого. Сколько процентов гипотенузы составляет периметр треугольника?

3. Текстовые задачи

Задачи на движение

Когда мы говорим о равномерном движении по прямой, то прежде всего мы подразумеваем, что скорость движущегося объекта (v), время его движения (t) и пройденное им расстояние (S) связаны формулой:

$$S = v \cdot t,$$

из которой вытекают еще два соотношения:

$$v = \frac{S}{t}, \ \ t = \frac{S}{v}.$$

Если два объекта находятся на расстоянии S друг от друга, а затем одновременно начинают двигаться навстречу друг другу, то время, через которое они встретятся, находится по формуле:

$$t = \frac{S}{v_1 + v_2},$$

где v_1 и v_2 — скорости их движения.

Предположим теперь, что эти объекты движутся в одну сторону и $v_1 > v_2$. Тогда время, через которое первый догонит второго, находится по формуле:

$$t = \frac{S}{v_1 - v_2}.$$

Пример 1. Скорость велосипедиста на 36 км/ч меньше скорости мотоциклиста. Расстояние от города до поселка велосипедист проезжает за 6 ч, а мотоциклист за 2 ч. Какова скорость велосипедиста?

Решение. Пусть x км/ч — скорость велосипедиста, тогда $x + 36$ км/ч — скорость мотоциклиста. Поскольку велосипедист находится в пути 6 ч, то преодолеваемое им расстояние составит $6x$ км. Поскольку мотоциклист находится в пути 2 ч, то расстояние составит $2(x + 36)$ км.

Удобнее, конечно, все эти рассуждения записывать в привычной всем таблице:

	v	t	S
Велосипедист	x	6	$6x$
Мотоциклист	$x+36$	2	$2(x+36)$

Из условий задачи следует, что велосипедист и мотоциклист проделали один и тот же путь, то есть

$$6x = 2(x+36),$$

откуда $x = 18$.

Ответ: 18 км/ч.

Пример 2. Два автомобиля отправляются в 420-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 10 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 1 ч раньше второго. Найдите скорость автомобиля, пришедшего к финишу вторым.

Решение. Пусть x км/ч — скорость второго автомобиля. Тогда $x + 10$ км/ч — скорость первого автомобиля. Поскольку оба автомобиля проезжают 420 км, то мы можем выразить время их движения:

$\dfrac{420}{x+10}$ ч — время движения первого автомобиля,

$\dfrac{420}{x}$ ч — время движения второго автомобиля.

Снова составим таблицу:

	v	t	S
Первый автомобиль	$x+10$	$\dfrac{420}{x+10}$	420
Второй автомобиль	x	$\dfrac{420}{x}$	420

Время движения второго автомобиля больше на 1 ч, поэтому

$$\frac{420}{x} - \frac{420}{x+10} = 1.$$

Остается только решить это уравнение:

$$\frac{420(x+10) - 420x}{x(x+10)} = 1,$$

$$\frac{4200}{x(x+10)} = 1,$$

$$\begin{cases} x(x+10) = 4200, \\ x(x+10) \neq 0. \end{cases}$$

Корнями уравнения $x^2 + 10x - 4200 = 0$ являются числа $x_1 = 60$ и $x_2 = -70$. Заметим, что $x_1 = 60$ и $x_2 = -70$ удовлетворяют условию $x(x+10) \neq 0$, но $x_2 = -70$ не подходит нам по смыслу задачи.

Ответ: 60 км/ч.

Пример 3. Расстояние между пунктами А и В составляет 435 км. Из А в В со скоростью 60 км/ч выехал первый атомобиль, а через час после этого навстречу ему из В выехал со скоростью 65 км/ч второй автомобиль. На каком расстоянии от пункта А произойдет встреча автомобилей?

Решение. За 1 час первый автомобиль проехал 60 км. Перед выездом из В второго автомобиля расстояние между ними было $435 - 60 = 375$ км. Пусть x — время, через которое встретились автомобили после выезда второго автомобиля.

	v	t	S
Первый автомобиль	60	x	$60x$
Второй автомобиль	65	x	$65x$

Тогда $60x + 65x = 375$, $125x = 375$, $x = 3$. Следовательно, первый автомобиль с момента отправления из A находился в пути 4 часа, за которые он проехал $60 \cdot 4 = 240$ км.

Ответ: 240 км.

Задачи для самостоятельного решения

Группа A

$\boxed{\mathbf{1}}$ Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города A в город B, расстояние между которыми равно 224 км. Отдохнув, он отправился обратно в A, увеличив скорость на 2 км/ч. По пути он сделал остановку на 2 ч, в результате чего затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из A в B. Найдите скорость велосипедиста на пути из A в B.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Когда автомобилист сделал остановку, выяснилось, что он проехал 5/14 того пути, что ему осталось проехать. После того как он проехал еще 12 км, оказалось, что всего он проехал 7/12 того, что осталось. Какова длина всего пути?

$\boxed{\mathbf{3}}$ Пешеход идет из поселка на станцию со скоростью 3 км/ч. Когда он прошел 4,5 км, по этому же маршруту выехал велосипедист со скоростью 12 км/ч. На станции они оказались одновременно. Какое расстояние от поселка до станции?

$\boxed{\mathbf{4}}$ Моторная лодка прошла по течению реки 7 км и возвратилась обратно, затратив на весь путь 1,2 ч. Найдите скорость лодки в стоячей воде, зная, что скорость течения реки равна 2 км/ч.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Моторная лодка прошла против течения реки 112 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 6 ч меньше. Найдите скорость течения, если скорость лодки в неподвижной воде равна 11 км/ч.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Моторная лодка прошла 39 км по течению реки и 28 км против течения реки за то же время, за которое она могла пройти в озере 70 км. Найдите скорость лодки в стоячей воде, если скорость течения реки равна 3 км/ч.

7 Автомобиль ехал из города A в город B, расстояние между которыми 200 км, с некоторой постоянной скоростью. На обратном пути 1 ч автомобиль ехал с прежней скоростью, а потом водитель уменьшил скорость на 20 км/ч. Какова была первоначальная скорость автомобиля, если на обратную дорогу ушло на 15 мин больше?

8 Расстояние между городами A и B равно 440 км. Из города A в город B выехал первый автомобиль, а через два часа после этого навстречу ему из города B выехал со скоростью 90 км/ч второй автомобиль. Найдите скорость первого автомобиля, если автомобили встретились на расстоянии 260 км от города A.

9 Из пункта A круговой трассы выехал велосипедист, а через 24 мин следом за ним отправился мотоциклист. Через 12 мин после отправления он догнал велосипедиста в первый раз, а еще через 36 мин после этого догнал его во второй раз. Найдите скорость велосипедиста, если длина трассы равна 30 км. Ответ дайте в км/ч.

10 Расстояние между пристанями A и B равно 96 км. Из A в B по течению реки отправился плот, а через 1 ч вслед за ним отправилась яхта, которая, прибыв в пункт B, тотчас повернула обратно и возвратилась в A. К этому времени плот прошел 45 км. Найдите скорость яхты в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 5 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Задачи на работу

Решение задач этого типа во многом схоже с решением задач на движение, поскольку основные понятия: производительность (p), время (t) и работа (A), подчинены соотношению:

$$A = p \cdot t,$$

из которого следуют формулы:

$$p = \frac{A}{t}, \quad t = \frac{A}{p}.$$

Ниже мы приведем примеры задач на работу, сюжеты которых аналогичны сюжетам задач на движение. Более того, мы переформулируем тексты рассмотренных выше задач.

Производительность можно понимать как скорость работы, а саму работу — как путь, который проходит работник до желаемого результата. Вспомним задачу про велосипедиста и мотоциклиста. Можно сформулировать подобную задачу на работу.

Скорость велосипедиста на 36 км/ч меньше скорости мотоциклиста. Расстояние от города до поселка велосипедист проезжает за 6 часов, а мотоциклист за 2 часа. Какова скорость велосипедиста?	Ученик мастера изготавливает в час на 36 деталей меньше мастера. Ученик выполнил за 6 часов работу, на которую мастеру понадобилось 2 часа. Какова производительность ученика?

Решение тоже будет подобным, если не сказать больше — под копирку, поскольку математическая модель задачи по сути такая же. Для решения обозначим через x производительность (скорость работы) ученика и т.д. Заметим, что здесь скорость измеряется в деталях в час.

Далее,

Два автомобиля отправляются в 420-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 10 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 1 ч раньше второго. Найдите скорость автомобиля, пришедшего к финишу вторым.	Две трубы наполняют водой емкость объемом 420 литров. Через первую трубу в емкость поступает на 10 литров в час воды больше, чем через вторую. Первая труба наполняет емкость на 1 час быстрее, чем вторая. Сколько литров воды поступает через вторую трубу в час?

Пусть x — скорость наполнения емкости второй трубой.... Решение такое же. Однако в этой задаче можно поставить и второй вопрос: за сколько времени наполнят емкость две трубы, работая одновременно?

Ну и третья задача.

Расстояние между городами Архангельск и Воскресенск равно 435 км. Из Архангельска в Воскресенск со скоростью 60 км/ч выезжает первый грузовик, а через час после этого навстречу ему из Воскресенска выехал со скоростью 65 км/ч второй грузовик. На каком расстоянии от Архангельска грузовики встретятся?	Два мастера должны изготовить 435 деталей. Первый мастер делает 60 деталей в час, а второй — 65 деталей в час. Второй мастер приступил к работе на час позже первого. Сколько деталей изготовит первый мастер к тому моменту, когда все детали будут сделаны?

Задачи для самостоятельного решения

Группа А

1 Дима может покрасить забор за 4 ч, а Володя может покрасить тот же забор за 11 ч. За какое время мальчики смогут покрасить этот забор, работая вдвоем?

2 Швейная фабрика получила заказ. Вторая, третья и четвертая швеи вместе могут выполнить этот заказ за 3 дня. Первая, третья и четвертая швеи — за 2 дня. Первая и вторая швеи выполнят работу за 5 дней. За сколько дней смогут выполнить заказ все четыре швеи, работая вместе?

3 Каждая из двух портних одинаковой квалификации может выполнить заказ за 15 ч. Через 3 ч после того, как одна из них приступила к работе, к ней присоединилась вторая портниха и работу над заказом они довели до конца вместе. Сколько часов потребовалось на выполнение всего заказа?

4 Двое строителей, работая вместе, могут выполнить работу за 12 дней. За сколько дней, работая отдельно, выполнит эту работу первый строитель, если он за 2 дня выполняет такую же часть работы, какую второй за 3 дня?

5 Первая труба пропускает на 4 л воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объемом 396 л она заполняет на 4 мин дольше, чем вторая?

6 Первый рабочий изготовил 60 деталей на 3 ч быстрее второго. За сколько часов второй рабочий изготовит 90 деталей, если, работая вместе, они изготавливают за 1 ч 30 деталей?

7 Дима и Рустам, работая вместе, могут покрасить забор за 10 часов. Сколько часов понадобится Диме, работая отдельно без Рустама, на покраску, если он за 4 часа красит такую же часть забора, какую Рустам красит за 5 часов?

Задачи на смеси, сплавы, растворы

Концентрация вещества в смеси (сплаве, растворе) — это величина, вычисляемая по формуле

$$p = \frac{m}{M} \cdot 100\%,$$

где m — масса вещества в смеси (сплаве, растворе), M — масса всей смеси (сплава, раствора).

Иногда в задачах на смеси, сплавы, растворы фигурируют не массы веществ, а их объемы. Концентрация в этом случае выражается аналогичной формулой

$$p = \frac{v}{V} \cdot 100\%,$$

где v — объем вещества в смеси (сплаве, растворе), V — объем всей смеси (сплава, раствора).

Когда мы решаем задачи этого типа, мы полагаем, что при слиянии нескольких смесей, сплавов или растворов масса и объем полученной смеси, сплава или раствора равны сумме масс и объемов смешиваемых компонентов соответственно.

Пример 1. Наталия смешала 5 литров раствора, содержащего 20% кислоты, 3 литра раствора, содержащего 40% той же кислоты. Найдите концентрацию кислоты в полученном Наталией растворе.

Решение. Объем чистой кислоты в первом растворе составляет $5 \cdot 0,2 = 1$ л, при этом объем чистой кислоты во втором растворе составляет $3 \cdot 0,4 = 1,2$ л. Следовательно, объем чистой кислоты в новом растворе равен $1 + 1,2 = 2,2$ л.

Объем нового раствора равен $5 + 3 = 8$ л. Тогда концентрация кислоты в новом растворе

$$p = \frac{2,2}{8} \cdot 100\% = 27,5\%.$$

Ответ: $27,5\%$.

Пример 2. Газ в первом сосуде содержал 15% кислорода, а газ во втором сосуде содержал 25% кислорода. Известно, что масса газа в первом сосуде была больше массы газа во втором сосуде на 100 г. Газы перемешали в третьем сосуде. Полученный третий газ содержит 12% кислорода. Найдите массу третьего газа.

Решение. Пусть x — масса первого газа (в граммах). Тогда $x+100$ — масса второго газа. Поэтому масса кислорода в первом газе равна $0,15x$ г, а масса кислорода во втором газе равна $0,1(x+100)$. Масса третьего газа равна $x + x + 100 = 2x + 100$. Поскольку третий газ содержит 12% кислорода, то

$$\frac{0,15x + 0,1(x+100)}{2x+100} = 0,12.$$

Откуда

$$0,25x + 10 = 0,12 \cdot (2x + 100),\ \ 0,25x + 10 = 0,24x + 12,$$

$$0,01x = 2,\ \ x = 200.$$

Следовательно, масса третьего газа равна $2 \cdot 100 + 100 = 300$.

Ответ: 300 г.

Задачи для самостоятельного решения

Группа А

1 В каких пропорциях нужно смешать 10%-й и 15%-й растворы кислоты, чтобы получить 12%-й раствор?

2 Сколько нужно взять 60%-го и 80%-го сплавов никеля, чтобы получить 10 кг 75%-го сплава никеля?

3 Смешали 40%-й и 60%-й растворы кислоты. Получился 45%-й раствор той же кислоты. Если каждого раствора взять на 10 л больше, то получится 47%-й раствор. Сколько литров каждого раствора было взято для составления первого раствора?

4 Сколько можно получить 10%-го раствора кислоты из 100 г 50%-го раствора этой кислоты?

5 Имеется два сплава меди, никеля и железа. Первый сплав содержит 10% меди. Если сплавить равные количества этих сплавов, то получится сплав, который содержит 70% железа. Если взять 5 кг первого сплава и 10 кг второго, то получится сплав, который содержит 1 кг меди. Сколько процентов никеля содержит второй сплав, если известно, что это процентное содержание в 2 раза выше, чем в первом сплаве?

4. Линейная функция

Линейная функция — это функция, задаваемая формулой

$$y = kx + b,$$

где k и b — некоторые числа. Графиком линейной функции является прямая. Заметим, что равенство

$$ax + by + c = 0,$$

где a, b и c — некоторые числа, определяет на координатной плоскости Oxy прямую. Уравнение $y = kx+b$ иногда называют уравнением прямой с угловым коэффициентом.

Для того, чтобы построить график линейной функции, достаточно двух точек. Ниже изображены графики трех функций: $y = 2x - 3$, $y = -2x + 1$ и $y = 2$.

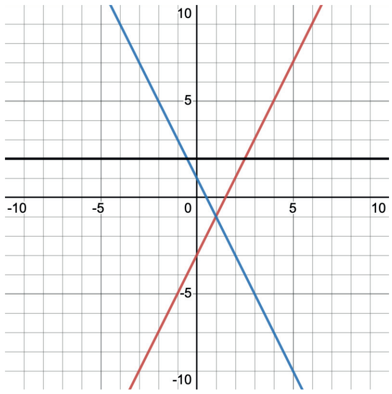


Рис. 1

Для того, чтобы понять, какой график к какой функции относится, достаточно вспомнить, что линейная функция $y = kx + b$ возрастает при $k > 0$ и убывает при $k < 0$, а при $k = 0$ график линейной функции — прямая, параллельная оси абсцисс.

Если нам даны две линейные функции $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ такие, что $k_1 \cdot k_2 = -1$, то их графиками будут взаимно перпендикулярные прямые. Ниже на рисунке изображены графики функций $y = 2x - 3$ и $y = -\dfrac{1}{2}x + 5$.

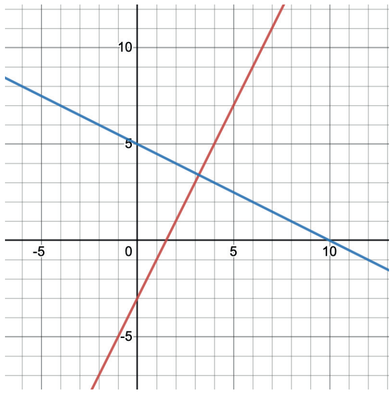


Рис. 2

Если нам даны две линейные функции $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ такие, что $k_1 = k_2$ и $b_1 \neq b_2$, то их графиками будут параллельные прямые. Ниже на рисунке изображены графики функций $y = 2x - 3$ и $y = 2x + 5$.

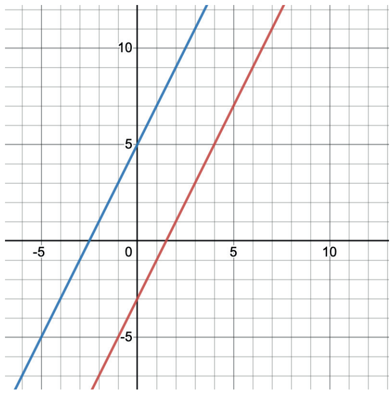


Рис. 3

Пример 1. Найдите координаты точки пересечения прямых

$$y = 2x - 3 \text{ и } y = -2x + 1.$$

Решение. Координаты точки пересечения прямых удовлетворяют обоим уравнениям, а значит, чтобы их найти нужно решить систему уравнений

$$\begin{cases} y = 2x - 3, \\ y = -2x + 1. \end{cases}$$

Приравниваем правые части уравнений: $2x - 3 = -2x + 1$, $4x = 4$, $x = 1$, $y = 2 \cdot 1 - 3 = -1$.

Ответ: $(1, -1)$

Пример 2. Найдите все значения a, при которых прямые

$$y = (2a + 1)x - 3 \text{ и } y = (3a^2 + a - 1)x + 1$$

параллельны.

Решение. Запишем равенство угловых коэффициентов

$$2a + 1 = 3a^2 + a - 1$$

и решим получившееся уравнение:

$$3a^2 - a - 2 = 0,$$

$$a_1 = 1, \;\; a_2 = -\frac{2}{3}.$$

Ответ: $a_1 = 1$, $a = -\frac{2}{3}$.

Пример 3. Найдите все значения a, при которых прямые

$$y = (2a + 1)x - 3 \text{ и } y = (2a - 1)x + 1$$

перпендикулярны.

Решение. По условию перпендикулярности

$$2a + 1 = -\frac{1}{2a - 1}.$$

Откуда

$$\frac{4a^2}{2a - 1} = 0, \;\; a = 0.$$

Ответ: $a = 0$.

Задачи для самостоятельного решения

Группа А

1 В одной системе координат постройте графики функций

$$y = 3x - 6 \text{ и } y = 3x + 2.$$

2 В одной системе координат постройте графики функций

$$y = -3x - 6 \text{ и } y = \frac{1}{3}x + 2.$$

3 Составьте уравнение прямой, проходящей через точки $A(2, 3)$ и $B(3, 2)$.

4 Составьте уравнение прямой, проходящей через точки $C(-2, 4)$ и $D(2, 0)$.

5 Постройте прямые и укажите их точки пересечения: $2x+y-4 = 0$ и $x = 2$.

6 Постройте прямые и укажите их точки пересечения: $2x+y-4 = 0$ и $y = 2$.

7 Постройте прямые и укажите их точки пересечения:

$$3x + 2y + 4 = 0 \text{ и } 5x + 4y - 1 = 0.$$

8 Постройте прямые и укажите их точки пересечения:

$$-4x + 3y + 2 = 0 \text{ и } 7x - 2y - 6 = 0.$$

9 Изобразите множество точек плоскости, координаты (x, y) которых удовлетворяют неравенству $y \geq \frac{1}{2}x + 1$.

10 Изобразите множество точек плоскости, координаты (x, y) которых удовлетворяют неравенству $y < -2x + 1$.

11 Найдите все значения k, при которых прямая $y = kx + 2$ параллельна прямой $y = 3x + 4$.

$\boxed{\textbf{12}}$ Найдите все значения k, при которых прямая $y = kx - 2$ параллельна прямой $y = (2k+3)x - 4$.

$\boxed{\textbf{13}}$ Найдите все значения a, при которых прямые

$$y = 2x + 3 \text{ и } y = (2a+4)x + 1$$

перпендикулярны.

$\boxed{\textbf{14}}$ Найдите все значения a, при которых прямые $y = -\frac{2}{5}x + 1$ и $y = (-5a+4)x - 2$ перпендикулярны.

$\boxed{\textbf{15}}$ Составьте уравнение прямой, которая будет параллельна прямой $y = 2x + 5$ и проходит через точку $A(2, 2)$.

$\boxed{\textbf{16}}$ Составьте уравнение прямой, которая перпендикулярна прямой $y = 2x + 5$ и проходит через точку $A(2, 2)$.

$\boxed{\textbf{17}}$ Найдите все значения p, при которых точки $A(0, 0)$, $B(2, 4)$ и $C(3, 5p+8)$ лежат на одной прямой.

$\boxed{\textbf{18}}$ Найдите все значения p, при которых точки $A(0, 0)$, $B(4, 2)$ и $C(4p+2, 5)$ лежат на одной прямой.

$\boxed{\textbf{19}}$ Найдите все значения q, при которых функция $y = (q+2)x+5-q$ является строго возрастающей на всей числовой прямой.

$\boxed{\textbf{20}}$ Найдите все значения q, при которых функция $y = (2-q)x - q$ является строго убывающей на всей числовой прямой.

$\boxed{\textbf{21}}$ Постройте график функции $y = \dfrac{2x-6}{2x-6}$.

$\boxed{\textbf{22}}$ Постройте график функции $y = |x - 3|$.

$\boxed{\textbf{23}}$ Найдите координаты вершин треугольника, образованного отрезком прямой

$$3x + 4y - 12 = 0$$

и отрезками координатных осей.

Группа В

24 Составьте уравнение прямой, которая симметрична прямой

$$3x + 4y - 5 = 0$$

относительно оси ординат.

25 Составьте уравнение прямой, которая симметрична прямой

$$3x + 4y - 5 = 0$$

относительно оси абсцисс.

26 Дан треугольник ABC, где $A(0,0)$, $B(0,8)$ и $C(6,0)$.

А) Найдите координаты точки пересечения медиан $\triangle ABC$.

Б) Найдите координаты точки пересечения биссектрис $\triangle ABC$.

В) Достройте $\triangle ABC$ до прямоугольника $ABDC$ и напишите уравнение прямой, которая проходит через точку $E(10,0)$ и делит прямоугольник $ABDC$ на два равных по площади четырехугольника.

Г) Найдите все значения k, при которых прямая $y = k(x - 10)$ имеет с $\triangle ABC$: 1) ровно одну общую точку; 2) ровно две общие точки.

Д) Найдите все значения b, при которых прямая $y = 2x + b$ имеет с $\triangle ABC$: 1) ровно одну общую точку; 2) ровно две общие точки.

27 Дан треугольник ABC, где $A(0,4)$, $B(3,0)$ и $C(0,0)$.

А) Найдите координаты точки пересечения медиан треугольника ABC.

Б) Найдите координаты точки пересечения биссектрис треугольника ABC.

28 Дан треугольник ABC, где $A(0,4)$, $B(3,0)$ и $C(0,0)$. Напишите уравнение прямой, которая проходит через точку $D(2,1)$ и отсекает на сторонах угла $\angle CAB$ равные отрезки.

29 Дан четырехугольник $ABCD$, где $A(-2,-2)$, $B(-2,4)$, $C(3,4)$ и $D(3,-2)$. Найдите уравнение прямой, которая проходит через точку $E(2,-5)$ и делит четырехугольник $ABCD$ на два равновеликих четырехугольника.

$\boxed{\mathbf{30}}$ Графиком функции $y = f(x)$ является ломаная $ABCD$, где $A(-2,-2)$, $B(0,-1)$, $C(2,3)$ и $D(4,0)$.

А) Решите уравнение $f(x) = -\dfrac{1}{4}x + 2$.

Б) Найдите все значения параметра k, при которых графики функций $y = f(x)$ и $y = kx$ пересекаются в одной точке.

$\boxed{\mathbf{31}}$ Дан прямоугольный треугольник ABC, где $A(0,0)$, $B(3,3)$ и $C(3,0)$. Напишите уравнение прямой, которая проходит через точку $D(2,1)$ и отсекает от угла $\angle ACB$ треугольник, содержащийся внутри $\triangle ABC$ и имеющий при этом наименьшую площадь.

$\boxed{\mathbf{32}}$ Напишите уравнение касательной к графику функции $y = x^2$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

$\boxed{\mathbf{33}}$ Составьте уравнение прямой, которая проходит через точку $A(6,8)$ и касается графика функции $y = x^2$.

$\boxed{\mathbf{34}}$ Напишите уравнение линейной функции $y = kx + b$, $k > 0$, график которой проходит через точку $A(1,2)$ и отсекает от графика функции $y = |x|$ треугольник наименьшей площади.

$\boxed{\mathbf{35}}$ Напишите уравнение линейной функции $y = kx + b$, $k > 0$, график которой проходит через точку $A(0,2)$ и отсекает от графика функции $y = |x|$ треугольник наименьшей площади.

5. Уравнения и неравенства

Группа А

$\boxed{\mathbf{1}}$ Решите уравнение

$$73x^2 - 71x - 2 = 0.$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Решите уравнение

$$73(2x-1)^2 - 71(2x-1) - 2 = 0.$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ Решите уравнение

$$73x^2 - 71|x| - 2 = 0.$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ Решите уравнение

$$(x^2+2x+1)^2 - 4x^2 - 8x - 1 = 0.$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ Найдите сумму и произведение корней уравнения

$$3\sqrt{17}\,x^2 + 15\sqrt{68}\,x + \sqrt{153} = 0.$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ Решите уравнение $\dfrac{1}{7}(x-1)^2 - 7 = 0.$

$\boxed{\mathbf{7}}$ Решите уравнение $5(|x|-2)^2 - \dfrac{1}{5} = 0.$

$\boxed{\mathbf{8}}$ Решите уравнение $12x^2 - x = 0.$

$\boxed{\mathbf{9}}$ Решите уравнение $-7x^2 + 2|x| = 0.$

$\boxed{\mathbf{10}}$ Решите уравнение $\sqrt{3}(x+2)^2 - 6(x+2) = 0.$

$\boxed{\mathbf{11}}$ Решите уравнение $\dfrac{2x^2-3}{5} = -\dfrac{3x^2+x}{20}.$

$\boxed{\mathbf{12}}$ Решите уравнение $\dfrac{2(3x-1)^2-3}{5} = -\dfrac{3(3x-1)^2+x}{20}.$

13 Решите уравнение $\dfrac{2(3|x|-1)^2-3}{5} = -\dfrac{3(3|x|-1)^2+x}{20}$.

14 Решите уравнение $\dfrac{5}{x-2} + \dfrac{4}{x-2} = 9$.

15 Решите уравнение $\dfrac{5}{x^2-2} + \dfrac{4}{x^2-2} = 9$.

16 Решите уравнение $\dfrac{5}{x^2+x-2} + \dfrac{4}{x^2+x-2} = 9$.

17 Составьте квадратное уравнение с целыми взаимно простыми коэффициентами, если известно, что корни x_1 и x_2 данного уравнения удовлетворяют соотношениям

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0,6, \\ x_1 \cdot x_2 = -0,8. \end{cases}$$

18 Найдите значение выражений $x_1 + x_2$, x_1x_2, $x_1^2x_2 + x_1x_2^2$, $x_1^2 + x_2^2$ и $x_1^3 + x_2^3$, где x_1 и x_2 — корни уравнения $4x^2 + 7x - 16 = 0$.

19 Найдите значение выражения $\dfrac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2x_2 + x_1x_2^2}$, где x_1 и x_2 — корни уравнения $5x^2 - 20x - 8 = 0$.

20 Один из корней уравнения

$$x^2 - ax + a^2 - 49 = 0$$

равен $\sqrt{7}$. Найдите второй корень, если известно, что $a > 0$.

Найдите все значения a, при которых уравнение имеет единственный корень:

21 $x^2 + 8x + 9a = 0$.

22 $(a-7)x^2 + 4x - 10 = 0$.

23 $x^2 + ax - 9 = 0$.

24 $x^2 + (a-5)x + a - 5 = 0$.

25 $(a^2-5)x^2 - 4ax + 9 = 0$.

26 Решите неравенство

$$-0,25x^2 + 0,2x + 0,05 > 0.$$

27 Решите неравенство

$$-\frac{1}{49}x^2 + \frac{8}{7}x - 16 \le 0.$$

28 Решите неравенство

$$(\sqrt{3} - \sqrt{7})\,x^2 \le -\frac{81}{\sqrt{3} + \sqrt{7}}.$$

29 Найдите область определения функции

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 7x - 8}.$$

30 Найдите область определения функции

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 7x - 8} + \sqrt{x + 10}.$$

31 Найдите область определения функции

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 7x - 8} + \sqrt{x + 10} + \sqrt{10 - x}.$$

32 Найдите область определения функции

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x^2 - 3x - 27}}{x - 5}.$$

33 Найдите область определения функции

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 6x - 7}}{\sqrt{x^2 - 4x}}.$$

34 Найдите область определения функции

$$f(x) = \sqrt{2 - x - x^2} + \sqrt{x - \frac{1}{2}}.$$

35 Периметр прямоугольника равен 26. При каком наименьшем целом значении ширины прямоугольника его площадь будет больше 30?

Группа B

Найдите все значения a, при каждом из которых ровно один из корней уравнения равен нулю:

36 $x^2 + 4x + 5a + 20 = 0.$

37 $x^2 - 4x + a^2 - 25 = 0.$

38 $x^2 + ax + 4a^2 - 8a = 0.$

39 $2x^2 + (a + 5)x + |a| - 5 = 0.$

Найдите все значения a, при каждом из которых оба корня уравнения равны нулю:

40 $-5x^2 + (a - 4)x + 16 - a^2 = 0.$

41 $x^2 + (5a + 7)x + 25a^2 - 49 = 0.$

42 $2x^2 + (|a| - 9a^2)x + a^2 - 9a = 0.$

43 $x^2 + (a^4 - 81)x + a^3 - 27 = 0.$

Найдите все значения a, при каждом из которых сумма корней уравнения равна нулю:

44 $x^2 + (2a + 10)x - 4 = 0.$

45 $x^2 - (5a - 10)x + 1 = 0.$

46 $x^2 + (a^2 - 8a)x + a - 4 = 0.$

47 $2x^2 + (4|a| - 8)x + a^2 + 2a = 0.$

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение не имеет корней:

48 $x^2 - 4x + a = 0.$

49 $ax^2 - 6x + 1 = 0.$

50 $(a - 1)x^2 + 2(a - 1)x + 10a - 10 = 0.$

$\boxed{\mathbf{51}}$ Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$x^2 - (a+2)x + 2a^2 < 0$$

не имеет решений.

$\boxed{\mathbf{52}}$ Найдите все значения параметра a, при каждом из которых число -2 входит в множество решений неравенства

$$x^2 - 4ax + 3a^2 \leq 0.$$

$\boxed{\mathbf{53}}$ Найдите область определения функции $f(x) = \sqrt{x^2 + 7|x| - 8}$.

$\boxed{\mathbf{54}}$ Найдите область определения функции

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 7|x| - 8} + \sqrt{25 - x^2}.$$

$\boxed{\mathbf{55}}$ Найдите область определения функции

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 7|x| - 8} + \sqrt{25 - x^2}}{x - |x|}.$$

$\boxed{\mathbf{56}}$ Решите уравнение $x^2 + (4a+5)x - 8a - 10 = 0$ в зависимости от значений параметра a.

$\boxed{\mathbf{57}}$ Найдите все значения a, при которых корни уравнения

$$x^2 + (4a+5)x - 8a - 10 = 0$$

противоположны по знаку.

$\boxed{\mathbf{58}}$ Найдите все значения a, при которых корни уравнения

$$x^2 + (4a+5)x - 8a - 10 = 0$$

больше 1.

Исследуйте уравнение на возможное количество корней в зависимости от значений параметра a:

$\boxed{\mathbf{59}}$ $(x^2 + 6x + 2a - 4)(|x-1| - a - 5) = 0.$

$\boxed{\mathbf{60}}$ $(|x-2| - a^2 + 4)(|x+3| - a - 2) = 0.$

6. Прогрессии

Арифметическая прогрессия — это числовая последовательность

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

такая, что

$$a_2 = a_1 + d,\ \ a_3 = a_1 + 2d,\ \ a_4 = a_1 + 3d, \ldots, a_n = a_1 + (n-1) \cdot d.$$

Для арифметической прогрессии справедливы следующие соотношения:

$$a_n = a_m - (m-n) \cdot d,$$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2},\ n \geq 2,$$

$$S_n = a_1 + \cdots + a_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

Геометрическая прогрессия — это числовая последовательность

$$b_1,\ b_2,\ b_3, \ldots, b_n, \ldots$$

такая, что

$$b_2 = b_1 \cdot q,\ \ b_3 = b_1 \cdot q^2,\ \ b_4 = b_1 \cdot q^3, \ldots, b_n = b_1 \cdot q^{n-1}.$$

Здесь мы предполагаем, что $b_1 \neq 0$ и $q \neq 0$.

Для геометрической прогрессии справедливы следующие соотношения:

$$|b_n| = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}},\ n \geq 2,$$

$S_n = b_1 + \cdots + b_n = \dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}$, если $q \neq 1$. Если $q = 1$, то $S_n = b_1 \cdot n$.

Задачи для самостоятельного решения

Группа А

1 Тренер посоветовал Андрею в первый день занятий провести на беговой дорожке 15 мин, а на каждом следующем занятии увеличивать время, проведенное на беговой дорожке, на 7 мин. За сколько занятий Андрей проведет на беговой дорожке в общей сложности 2 ч 25 мин, если будет следовать советам тренера?

2 В строительном магазине стоят 6 лестниц. Высота первой лестницы 1,2 м, а каждая следующая выше предыдущей на одно и то же число сантиметров. Найдите высоту четвёртой лестницы, если последняя лестница имеет высоту 2,7 м.

3 В каждую следующую неделю летних каникул Петя решает на одно и то же число задач по математике больше, чем в предыдущую. На пятой неделе он решил 33 задачи, а на десятой — 58. Сколько задач решил Петя на первой неделе?

4 На метеорологической станции было замечено, что с 8 по 12 июня включительно среднесуточная температура повышалась каждый день на $0,5°C$. Среднее арифметическое всех наблюдений с 8 по 12 июня оказалось равным $17°C$. Какая температура была 9 июня?

5 При подготовке к ОГЭ по математике Борис в течение трех дней решил 189 задач, увеличивая каждый день количество решенных задач на одно и то же число. В третий день он решил в 2 раза больше задач, чем в первый. Сколько задач решил Борис в третий день?

6 К исходу первого месяца котенок весил 400 г. Каждый месяц он прибавлял в весе 100 г. Через сколько месяцев котенок станет весить 1,5 кг?

7 Детей на уроке физкультуры выстроили по росту (первый – самый высокий) и оказалось, что каждый следующий на 1,5 см ниже своего соседа. Каков рост третьего по счету ученика, если в классе 21 ребенок и самый маленький имеет рост 150 см.

$\boxed{8}$ Известно, что все корни уравнения

$$(x^2 - 5x + 4)(x - a) = 0$$

различны и образуют арифметическую прогрессию. Найдите a.

$\boxed{9}$ Известно, что корни уравнения

$$\frac{(x^2 - 90x + 729)(x - a)}{x^2 - 1} = 0$$

образуют геометрическую прогрессию из трёх членов. Найдите a.

$\boxed{10}$ Стороны прямоугольного треугольника образуют арифметическую прогрессию. Найдите косинус большего острого угла этого треугольника.

$\boxed{11}$ Сумма 5, 8, 10, 21, 23 и 26-го членов арифметической прогрессии равна 213. Найдите сумму тридцати первых членов этой прогрессии.

$\boxed{12}$ Четвертый член геометрической прогрессии больше ее второго члена на 20, а сумма второго и третьего членов равна 10. Найдите сумму первых пяти членов этой прогрессии.

$\boxed{13}$ Произведение первого и тринадцатого членов геометрической прогрессии равно 64, а сумма первого и седьмого равна 8,125. Найдите знаменатель этой прогрессии.

$\boxed{14}$ Произведение четвертого и восьмого членов геометрической прогрессии равно 36. Найдите шестой член этой прогрессии.

$\boxed{15}$ Приведите пример арифметической прогрессии, в которой второй, девятый и тринадцатый члены являются последовательными членами некоторой геометрической прогрессии.

7. Задачи с параметром, задачи на координатной плоскости и координатной прямой

Текстовые задачи с параметром

$\boxed{1}$ Две моторные лодки находятся в 20 км друг от друга на озере. Двигаясь навстречу друг другу, они встречаются через 1 час. Если бы они находились в 15 км друг от друга и одна догоняла другую, то на это потребовалось бы 1 час 30 мин. Найдите скорости лодок.

Решение. Пусть x — скорость первой лодки, а y — скорость второй. Тогда условие «двигаясь навстречу друг другу, они встречаются через 1 час» дает уравнение $1 \cdot x + 1 \cdot y = 20$. Условие же «если бы они находились в 10 км друг от друга, и одна догоняла другую, то на это потребовалось бы 1 час 30 мин» (пусть первая лодка догоняет) дает $\frac{3}{2} \cdot x - \frac{3}{2} \cdot y = 15$. Далее остается решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 20; \\ 3x - 3y = 30. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на 3 и сложим со вторым:

$$\begin{cases} 3x + 3y = 60; \\ 3x - 3y = 30, \end{cases}$$

$$6x = 90,\ x = 15,$$

откуда $y = 20 - x;\ y = 5$.

Ответ: скорость первой лодки составляет 15 км/ч; скорость второй — 5 км/ч.

Структура решения задачи не изменится, если расстояния между лодками заменить буквенными выражениями.

Две моторные лодки находятся в a км друг от друга на озере. Двигаясь навстречу друг другу, они встречаются через 1 час. Если бы они находились в $a - 5$ км друг от друга и одна догоняла другую, то на это потребовалось бы 1 час 30 мин. Найдите скорости лодок.

Действительно,

$$\begin{cases} x + y = a; \\ \dfrac{3}{2}x - \dfrac{3}{2}y = a - 5. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на 3 и сложим со вторым:

$$\begin{cases} 3x + 3y = 3a; \\ 3x - 3y = 2a - 10, \end{cases}$$

$$6x = 5a - 10,\ \ x = \frac{5a-10}{6},$$

откуда $y = a - x = a - \dfrac{5a-10}{6} = \dfrac{a+10}{6}$.

$\boxed{2}$ Из пункта A в пункт B отправился велосипедист со скоростью $5a + 7$ км/ч, через полчаса вслед за ним отправился мотоциклист со скоростью $4a^2+8$ км/ч. Найдите расстояние между пунктами A и B, если мотоциклист прибыл в пункт B на 1,5 часа раньше велосипедиста.

Решение. Пусть x — расстояние между пунктами A и B. Тогда, пользуясь условиями задачи, мы можем заполнить таблицу:

	V	t	S
Велосипедист	$5a + 7$	$\dfrac{x}{5a+7}$	x
Мотоциклист	$4a^2 + 8$	$\dfrac{x}{4a^2+8}$	x

Поскольку мотоциклист выехал из пункта A на полчаса позже велосипедиста, а прибыл в пункт B на 1,5 часа раньше, то время движения мотоциклиста на 1 час меньше времени нахождения в пути велосипедиста:

$$\frac{x}{5a+7}-\frac{x}{4a^2+8}=1,\ \frac{4a^2+8-(5a+7)}{(4a^2+8)(5a+7)}\cdot x=1,$$

$$\frac{4a^2-5a+1}{(4a^2+8)(5a+7)}\cdot x=1.$$

Заметим, что из условий задачи следует, что $5a+7>0$, а выражение $4a^2+8$ вообще всюду положительно. Из последнего равенства следует

$$(4a^2-5a+1)\cdot x=(4a^2+8)(5a+7).$$

Корни квадратного трехчлена $4a^2-5a+1$ — $a_1=\dfrac{1}{4}$ и $a_2=1$.

Если $a=\dfrac{1}{4}$, то $0\cdot x=\left(4\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^2+8\right)\left(5\cdot\dfrac{1}{4}+7\right)$, $0\cdot x=\dfrac{33}{4}\cdot\dfrac{33}{4}$, $0\cdot x=\dfrac{1089}{16}$. Уравнение $0\cdot x=\dfrac{1089}{16}$ не имеет решений.

Если $a=1$, то, аналогично рассуждая, приходим к уравнению $0\cdot x=144$, которое не имеет решений.

Далее, если $a\neq\dfrac{1}{4}$ и $a\neq 1$, то $4a^2-5a+1\neq 0$,

$$x=\frac{(4a^2+8)(5a+7)}{4a^2-5a+1}.$$

Кроме того, поскольку x — это расстояние, то должно выполняться неравенство $\dfrac{(4a^2+8)(5a+7)}{4a^2-5a+1}>0$. В силу справедливости неравенства $4a^2+8>0$ для всех значений a и необходимости выполнения неравенства $5a+7>0$, вытекающей из условия задачи, необходимо решить неравенство $4a^2-5a+1>0$. Его решениями будут все $a\in\left(-\infty;\dfrac{1}{4}\right)\cup\left(1;+\infty\right)$. Таким образом, получаем

Ответ:

1. $\dfrac{(4a^2+8)(5a+7)}{4a^2-5a+1}$, где $a\in\left(-\dfrac{7}{5};\dfrac{1}{4}\right)\cup\left(1;+\infty\right)$.

2. Решений нет, если $a\in\left(-\infty;-\dfrac{7}{5}\right]\cup\left[\dfrac{1}{4};1\right]$.

$\boxed{3}$ Из двух пунктов A и B, расстояние между которыми равно 20 км, одновременно навстречу друг другу отправились два пешехода. Скорость первого $2a+1$ км/ч, второго — $5a-4$ км/ч. Найдите все значения a, при которых пешеходы встретятся между 5-м и 15-м км дороги от A до B через 2 часа после начала движения.

Решение. Составим таблицу:

	V	t	S
Первый пешеход	$2a+1$	2	$2\cdot(2a+1)$
Второй пешеход	$5a-4$	2	$2\cdot(5a-4)$

Из вопроса задачи следует

$$\begin{cases} 5 \le 4a+2 \le 15, \\ 5 \le 10a-8 \le 15, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} \dfrac{3}{4} \le a \le \dfrac{13}{4}, \\ \\ \dfrac{13}{10} \le a \le \dfrac{23}{10}, \end{cases}$$

$a \in \left[\dfrac{13}{10}; \dfrac{23}{10}\right]$.

Ответ: $a \in \left[\dfrac{13}{10}; \dfrac{23}{10}\right]$.

$\boxed{4}$ Из двух сплавов, содержащих соответственно $a\%$ и 10% меди, получили третий сплав, который содержит 15% меди. Сколько граммов каждого сплава было взято, если масса третьего сплава равна 1 кг?

Решение. Пусть x кг — масса первого сплава, тогда $1-x$ кг — масса второго. Первый сплав содержит $\dfrac{a}{100}\cdot x$ кг чистой меди, второй содержит $\dfrac{10}{100}(1-x)$ кг чистой меди, а третий — $\dfrac{15}{100}\cdot 1$ кг. Поэтому

$$\frac{a}{100}\cdot x+\frac{10}{100}(1-x)=\frac{15}{100}\cdot 1,$$

$$ax+10-10x=15,\ (a-10)x=5.$$

Если $a=10$, то получаем уравнение $0\cdot x=5$, которое не имеет решений. Если $a\neq 10$, то $x=\dfrac{5}{a-10}$ кг — масса первого сплава. Найдем массу второго:

$$1-x=1-\frac{5}{a-10}=\frac{a-15}{a-10}.$$

Из условий задачи следует, что

$$\begin{cases}\dfrac{5}{a-10}>0,\\[2ex] \dfrac{a-15}{a-10}\geq 0,\end{cases}$$

поэтому $a\geq 15$.

Ответет:

1. $\dfrac{5}{a-10}$ и $\dfrac{a-15}{a-10}$ при $15\leq a\leq 100$.
2. Нет решений, если $a<15$.

$\boxed{5}$ Имеется два сосуда емкостью 10 л. В первом из них содержится 8 л 40-процентного раствора кислоты, а в другом — 6 л 50-процентного раствора этой же кислоты. Сколько раствора нужно перелить из второго сосуда в первый, чтобы в первом сосуде получился раствор, концентрация которого равна $a\%$?

Решение. Пусть из второго сосуда необходимо перелить x л раствора. В первом сосуде содержится $8 \cdot 0,4 = 3,2$ л чистой кислоты. После переливания в первом сосуде станет $3,2 + 0,5 \cdot x$ л чистой кислоты, а объем раствора станет равным $8 + x$ л. Тогда $\frac{3,2+0,5x}{8+x}$ — доля кислоты в получившемся растворе. Из условий задачи следует

$$\frac{3,2+0,5x}{8+x} = \frac{a}{100}.$$

Откуда $320 + 50x = 8a + ax$, $(50 - a)x = 8a - 320$. Если $a = 50$, то мы приходим к уравнению $0 \cdot x = 80$, которое не имеет решения. Если $a \neq 50$, то $x = \frac{8a-320}{50-a}$.

Из условия задачи следует, что мы не можем перелить более чем 2 л., поэтому $0 \leq x \leq 2$, то есть

$$\begin{cases} \dfrac{8a-320}{50-a} \geq 0, \\ \\ \dfrac{8a-320}{50-a} \leq 2. \end{cases}$$

Откуда

$$\begin{cases} \dfrac{8a-320}{50-a} \geq 0, \\ \\ \dfrac{10a-420}{50-a} \leq 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \in [40; 50), \\ a \in (-\infty; 42] \cup (50; +\infty), \end{cases}$$

$a \in [40; 42]$.

Ответ:

1. $\dfrac{8a-320}{50-a}$ при $a \in [40; 42]$.
2. Решений нет, если $a \in (-\infty; 40) \cup (42; +\infty)$.

$\boxed{6}$ Работники завода выполняли некоторую работу. Если число рабочих уменьшить на 15 человек, то работа будет закончена на $2a$ дня позже, а если же число рабочих увеличить на 25 человек, то задание будет выполнено на $3a$ дня раньше. Сколько рабочих выполняло задание первоначально и за сколько дней они завершили работу?

Решение. Пусть первоначально в бригаде было x человек и они выполнили задание за y дней. Тогда, приняв производительность одного рабочего за единицу, мы получим:

$$\begin{cases} xy = (x-15)(y+2a); \\ xy = (x+25)(y-3a), \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = xy + 2ax - 15y - 30a; \\ xy = xy - 3ax + 25y - 75a, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2ax - 15y - 30a = 0; \\ -3ax + 25y - 75a = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6ax - 45y - 90a = 0; \\ -6ax + 50y - 150a = 0, \end{cases}$$

$$5y = 240a,\ \ y = 48a;$$

$$2ax - 720a - 30a = 0;\ 2ax = 750a.$$

По смыслу задачи $a > 0$, поэтому $x = 375$.

Ответ: на заводе работает 375 рабочих, они выполнили задание за $48a$ дней.

$\boxed{7}$ Работники завода выполняли некоторую работу. Если число рабочих уменьшить на 15 человек, то работа будет закончена на a дней позже, а если же число рабочих увеличить на 25 человек, то задание будет выполнено на $a-10$ дней раньше. Сколько рабочих выполняло задание первоначально и за сколько дней они завершили работу?

Решение. Пусть первоначально в бригаде было x человек и они выполнили задание за y дней. Тогда, приняв производительность одного рабочего за единицу, мы получим:

$$\begin{cases} xy = (x-15)(y+a); \\ xy = (x+25)(y-a+10), \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = xy + ax - 15y - 15a; \\ xy = xy - ax + 10x + 25y - 25a + 250, \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax - 15y - 15a = 0; \\ -ax + 10x + 25y - 25a + 250 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5ax - 75y - 75a = 0; \\ -3ax + 30x + 75y - 75a + 750. \end{cases}$$

После сложения уравнений получаем

$$2ax + 30x - 150a + 750 = 0,$$

$$(2a+30)x = 150a - 750$$

Заметим, что по смыслу задачи $a > 10$, поэтому $2a + 30 > 0$,

$$x = \frac{150a - 750}{2a + 30},$$

$$x = \frac{75a - 375}{a + 15}.$$

По смыслу задачи дробь $\dfrac{75a - 375}{a + 15}$ должна быть натуральным числом.

Найдем все значения a, при которых дробь $\dfrac{150a - 525}{2a + 21}$ является натуральным числом. Выделим целую часть дроби:

$$\frac{75(a+15) - 1500}{a + 15} = 75 - \frac{1500}{a + 15}.$$

Из условия $a > 10$ следует, что наименьшим натуральным делителем числа 1500, при котором рассматриваемая дробь будет натуральным числом, является число 30. Выпишем все натуральные делители числа 1500, не меньшие чем 30:

$$30, 50, 60, 75, 100, 125, 150, 250, 300, 375, 500, 750, 1500.$$

Им соответствуют значения параметра a:

$$15, 35, 45, 60, 85, 110, 135, 235, 285, 360, 485, 735, 1485.$$

Найдем значение второй переменной:

$$a \cdot \frac{75a - 375}{a + 15} - 15y - 15a = 0,$$

$$a \cdot \frac{5a - 25}{a + 15} - y - a = 0,$$

$$y = \frac{5a^2 - 25a - a^2 - 15a}{a + 15},$$

$$y = \frac{4a^2 - 40a}{a + 15},$$

$$y = 4a - 100 + \frac{1500}{a + 15}.$$

Ответ:

$$x = \frac{75a - 375}{a + 15},\ y = \frac{4a^2 - 40a}{a + 15},$$

$$a \in \{15, 35, 45, 60, 85, 110, 135, 235, 285, 360, 485, 735, 1485\}.$$

Прямые на плоскости

$\boxed{1}$ Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $x + y > 3$.

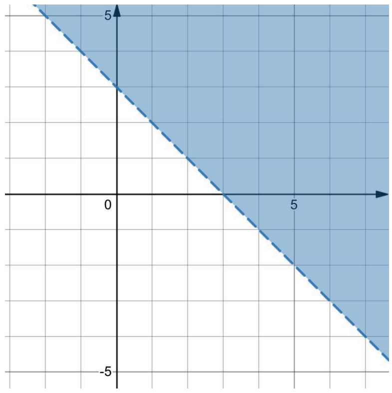


Рис. 4

Решение. Перепишем неравенство $x + y > 3$ в виде $y > -x + 3$ и построим прямую $y = -x + 3$. Она делит координатную плоскость на две полуплоскости, в одной из которых выполняется неравенство $y > -x + 3$, а в другой — неравенство $y < -x + 3$. Чтобы выяснить, в какой полуплоскости выполняется неравенство $y > -x + 3$, возьмем точку с координатами $(2; 2)$, которая лежит в верхней полуплоскости, и подставим ее координаты в рассматриваемое неравенство: $2 > -2+3$. Видим, что получается верное числовое неравенство. Это означает, что искомым множеством будет множество точек верхней полуплоскости без границы в виде прямой $y = -x + 3$, поскольку неравенство строгое. Границу изображаем пунктиром.

$\boxed{2}$ Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $2x - 5y \leq 1$.

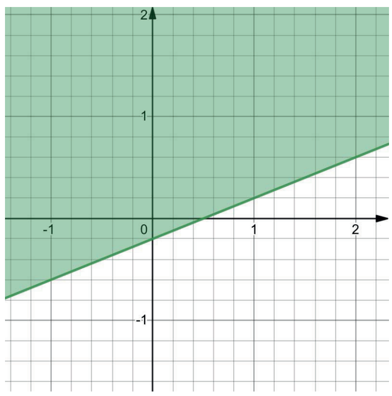


Рис. 5

Решение. Перепишем неравенство $2x - 5y \leq 1$ в виде $y \geq \frac{2}{5}x - \frac{1}{5}$. Остается построить прямую $y = \frac{2}{5}x - \frac{1}{5}$ и повторить рассуждения из решения предыдущей задачи. Здесь также можно воспользоваться точкой $(2; 2)$, а можно взять точку $(1; 1)$ или любую другую, не лежащую на границе, которая здесь, кстати, изображена сплошной линией, так как неравенство нестрогое.

$\boxed{3}$ Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $(x+y-3)(2x-5y+1) \leq 0$.

Решение. Знак произведения $(x + y - 3)(2x - 5y + 1)$ зависит от знаков его множителей $x + y - 3$ и $2x - 5y + 1$. Построим прямые $y = -x + 3$ и $y = \frac{2}{5}x - \frac{1}{5}$. Они разбивают координатную плоскость на четыре части. Для определения в каких частях выполняется данное неравенство можно воспользоваться приемом, изложенным чуть выше. Возьмем точку $(4; 0)$ и подставим ее координаты в левую часть неравенства из условия задачи: $(4 + 0 - 3)(2 \cdot 4 - 5 \cdot 0 + 1) = 9$; $9 > 0$, поэтому в правой части координатной плоскости неравенство $(x + y - 3)(2x - 5y + 1) \leq 0$ не выполняется. Возьмем точку $(2; 2)$ и проделаем ту же операцию: $(2 + 2 - 3)(2 \cdot 2 - 5 \cdot 2 + 1) = -5$; $-5 < 0$, поэтому в верхней части координатной плоскости неравенство $(x+y-3)(2x-5y+1) \leq 0$ выполняется. Аналогично поступаем с оставшимися двумя частями. В результате получаем следующую картинку.

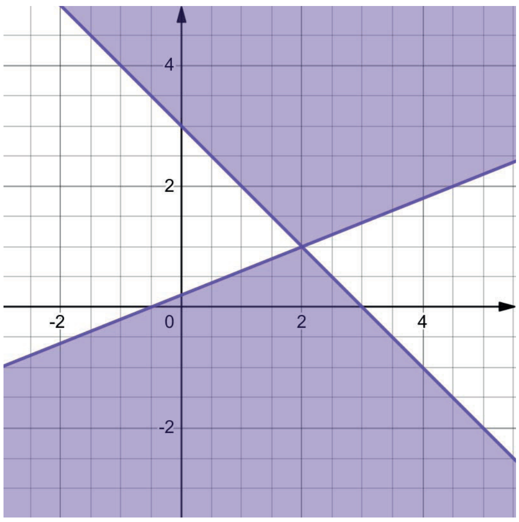


Рис. 6

$\boxed{4}$ Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $\dfrac{x+y-3}{2x-5y+1} \leq 0.$

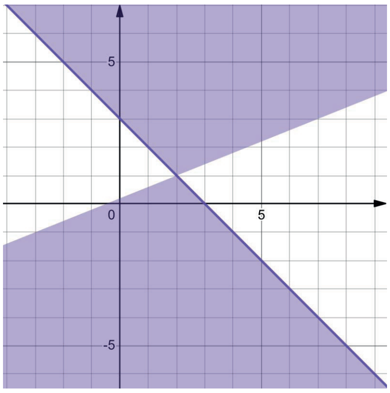


Рис. 7

Решение. Знак дроби $\dfrac{x+y-3}{2x-5y+1}$ зависит от знаков ее числителя $x+y-3$ и знаменателя $2x-5y+1$. Поэтому в этом случае картинка будет практически такой же, как и в примере выше, за исключением одного: точки прямой $y = \frac{2}{5}x - \frac{1}{5}$ будут «выколотыми», поскольку их координаты превращают знаменатель дроби в ноль, а следовательно, не являются решениями неравенства.

Линейные уравнения с параметром

Решая уравнение $mx = n$, мы неизменно проходим по одному из следующих путей:

1. Если $m = 0$ и $n = 0$, то уравнение принимает вид $0 \cdot x = 0$ и поэтому x — любое действительное число.

2. Если $m = 0$ и $n \neq 0$, то мы приходим к уравнению $0 \cdot x = n$, которое не имеет корней.

3. Если $m \neq 0$, то уравнение $mx = n$ имеет единственный корень $x = \dfrac{n}{m}$.

Пример 1. Решите уравнение $(a-1)x = (a-1)$ в зависимости от значений параметра a.

Решение. Если $a = 1$, то уравнение принимает вид $0 \cdot x = 0$. Его корнем является любое действительное число. Если $a \neq 1$, то $x = \dfrac{a-1}{a-1}$, $x = 1$.

Ответ:

1. Если $a = 1$, то x — любое действительное число.
2. Если $a \neq 1$, то $x = 1$.

Уравнение $(a-1)x = (a-1)$ задает на координатной плоскости Oax (a — абсцисса, x — ордината) множество точек (область) в том смысле, что координаты (a, x) каждой точки этой области удовлетворяют данному уравнению (то есть при подстановке координат в данное уравнение вместо a и x получается верное числовое равенство), а координаты любой другой точки, не входящей в эту область, не удовлетворяют данному уравнению.

Координаты любой точки вертикальной прямой $a = 1$ удовлетворяют уравнению, поскольку равенство $(1-1)x = 1-1$ для всех значений x является верным. Кроме того, координаты любой точки горизонтальной прямой $x = 1$ также удовлетворяют уравнению, равенство $(a-1) \cdot 1 = a-1$ для всех значений a является верным.

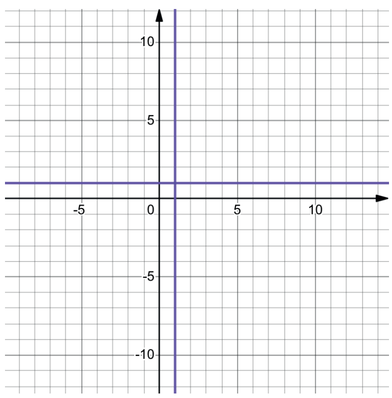


Рис. 8

Пример 2. Решите уравнение $(a-1)x = (a+5)$ в зависимости от значений параметра a.

Решение. Если $a = 1$, то уравнение принимает вид $(1-1)x = (1+5)$, $0 \cdot x = 6$, которое не имеет решений. Если $a \neq 1$, то $x = \dfrac{a+5}{a-1}$.

Ответ:

1. Если $a = 1$, то уравнение не имеет корней;
2. Если $a \neq 1$, то $x = \dfrac{a+5}{a-1}$.

Уравнение $(a-1)x = (a+5)$ задает на координатной плоскости Oax множество точек. Координаты любой точки вертикальной прямой $a = 1$ не удовлетворяют уравнению, поскольку для всех x равенство $0 \cdot x = 6$ не является верным. Координаты любой точки гиперболы $x = \dfrac{a+5}{a-1}$ удовлетворяют исходному уравнению. Иными словами, каждая точка гиперболы $x = \dfrac{a+5}{a-1}$ является решением уравнения $(a-1)x = (a+5)$ с двумя неизвестными.

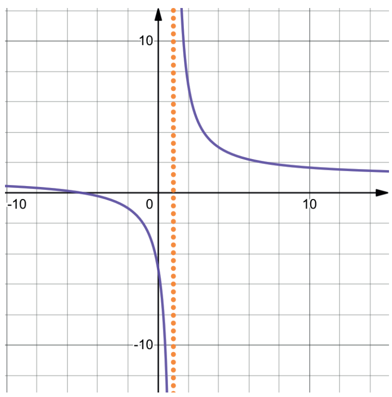


Рис. 9

Пример 3. Решите уравнение $(a^2 - 3a + 2)x = a^2 + 4a - 5$ в зависимости от значений параметра a.

Решение. Корнями квадратного трехчлена $a^2 - 3a + 2$ являются числа 1 и 2, а корнями трехчлена $a^2 + 4a - 5$ числа 1 и -5. Поэтому если $a = 1$, то исходное уравнение принимает вид $0 \cdot x = 0$.

Следовательно, при $a = 1$ его корнем является любое действительное число. Если $a = 2$, то исходное уравнение принимает вид $0 \cdot x = 7$, которое, в свою очередь, не имеет корней. Следовательно, при $a = 2$ уравнение не имеет корней. Наконец, если $a \notin \{1; 2\}$, то

$$x = \frac{(a-1)(a+5)}{(a-1)(a-2)} = \frac{a+5}{a-2}.$$

Уравнение $(a^2 - 3a + 2)x = a^2 + 4a - 5$ задает на координатной плоскости Oax некоторое множество точек. Переписав это уравнение в виде $(a-1)(a-2)x = (a-1)(a+5)$, мы видим, что все точки горизонтальной прямой $a = 1$ удовлетворяют уравнению, поскольку равенство $(1-1)(1-2)x = (1-1)(1+5)$ для всех значений x будет верным. Все точки горизонтальной прямой $a = 2$ не удовлетворяют уравнению, так как равенство $(2-1)(2-2)x = (2-1)(2+5)$ для всех значений x будет неверным. Уравнению удовлетворяют все точки гиперболы $x = \dfrac{a+5}{a-2}$, первая координата которых отлична от $a = 1$ и $a = 2$.

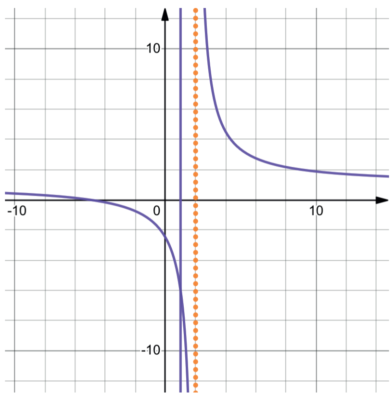


Рис. 10

Квадратные уравнения с параметром

Рассмотрим уравнение $(2a+1)x^2+(a-1)x+3a-3$. Если $2a+1 = 0$, то есть в ситуации, когда $a = \dfrac{1}{2}$, уравнение становится линейным:

$$-\frac{3}{2}x - \frac{9}{2} = 0, \ -\frac{3}{2}x = \frac{9}{2}, \ x = -3.$$

Пусть теперь $2a + 1 \neq 0$. Тогда уравнение будет квадратным, и наличие и вид его корней зависит от дискриминанта

$$D = (a-1)^2 - 4(2a+1)(3a-3) =$$

$$= (a-1)(a-1-12(2a+1)) = (a-1)(-23a-13).$$

Корнями уравнения $(a-1)(-23a-13) = 0$ являются числа $a = 1$ и $a = -\dfrac{13}{23}$. Следовательно, при $a = 1$ и $a = -\dfrac{13}{23}$ исходное уравнение имеет один корень $x = -\dfrac{a-1}{2(2a+1)}$.

Чтобы узнать, когда исходное уравнение имеет два корня, решим неравенство $(a-1)(-23a-13) > 0$. Его решения составляют интервал $\left(-\dfrac{13}{23}; 1\right)$. Заметим, что $a = -\dfrac{1}{2}$ принадлежит интервалу $\left(-\dfrac{13}{23}; 1\right)$, поэтому два корня исходное уравнение будет иметь при

$$a \in \left(-\frac{13}{23}; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; 1\right).$$

Далее скажем, что при $a \in \left(-\infty; -\dfrac{13}{23}\right) \cup (1, +\infty)$ уравнение не имеет корней.

Задачи для самостоятельного решения

Группа А

1 Найдите все значения a, при которых уравнение

$$(a-1)(a-2)x = (a-1)(a-3)$$

а) имеет бесконечно много корней; б) не имеет корней; в) имеет один корень.

2 Для каждого значения параметра a решите уравнение

$$(a+2)(x-4)x = a^2 - 4.$$

3 Для каждого значения параметра a решите уравнение

$$(a^2-9)(3x+5)x = a-3.$$

4 Для каждого значения параметра a решите уравнение

$$\frac{x^2-6ax}{a-4} = 0.$$

5 Для каждого значения параметра a решите уравнение

$$\frac{x-3}{a+2} - \frac{2x}{a-3} = 0.$$

6 Решите уравнение $(a^2+a-2)x = a^2-4$ в зависимости от значений параметра a.

Группа В

7 Решите уравнение $a(a+3)x^2+(2a+6)x-3a-9=0$ в зависимости от значений параметра a.

$\boxed{8}$ Для каждого значения параметра a решите уравнение

$$\frac{a(x+2)}{a-1} - \frac{2(x-4a)}{a-1} = 0.$$

$\boxed{9}$ Найдите все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} (a+3)x + 2y = 3, \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

не имеет решений.

$\boxed{10}$ Найдите все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} 4x - (a+33)y = a^2 + 3, \\ x + 8ay = 2a - 1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

$\boxed{11}$ Для каждого значения параметра a решите уравнение

$$|4x + 3a| = a.$$

$\boxed{12}$ Найдите все значения параметра a, при которых прямые

$$y = 4 - x, \;\; y = ax + 3a - 8$$

пересекаются в точке $A(0;4)$.

$\boxed{13}$ Найдите все значения параметра a, при которых прямые

$$y = \frac{ax}{2} + 1, \;\; y = a(2a+3)x + 4a$$

не имеют общих точек.

$\boxed{14}$ Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют системе:

$$\begin{cases} \dfrac{x+y-3}{2x-5y+1} \le 0; \\ x \in [-2;3]. \end{cases}$$

15 Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют системе:

$$\begin{cases} \dfrac{x+y-3}{2x-5y+1} \le 0; \\ y \in [-2; 3]. \end{cases}$$

16 Найдите площадь и периметр фигуры, ограниченной прямыми $y = 2x$, $y = 2x + 3$, $y = 3$ и $y = -2$.

17 Найдите площадь и периметр фигуры, ограниченной прямыми $y = x$, $y = -2x + 6$ и осью абсцисс.

18 Четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм. Известно, что $A(1; 3)$, $B(2; 6)$, $C(8; 6)$. Найдите уравнения всех прямых, которые проходят через начало координат и имеют с параллелограммом $ABCD$ ровно одну общую точку.

19 Найдите все значения k, при которых прямая $y = kx$ имеет ровно две общие точки с треугольником ABC, где $A(1; 3)$, $B(2; 8)$ и $C(3; 6)$.

20 Найдите все значения a, при которых прямая $y = a(x - 2)$ имеет ровно одну общую точку с графиком функции $y = |x + 1|$.

21 Найдите все значения a, при которых прямая $y = a(x - 2) + 3$ имеет ровно одну общую точку с графиком функции $y = 2 - |x + 1|$.

22 Изобразите на координатной прямой множество точек, координаты которых удовлетворяют равенству $|x - 1| = 3$.

23 Изобразите на координатной прямой множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $|x - 1| \le 3$.

24 Изобразите на координатной прямой множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $|x - 1| > 3$.

25 Изобразите на координатной прямой множество точек, координаты которых удовлетворяют равенству $|x - 1| + |x - 5| = 4$.

26 Изобразите на координатной прямой множество точек, координаты которых удовлетворяют равенству $|x - 1| = a$, в зависимости от значений параметра a.

27 Изобразите на координатной прямой множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $|x-1| \le a$, в зависимости от значений параметра a.

28 Изобразите на координатной прямой множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $|x-1| > a$, в зависимости от значений параметра a.

29 Изобразите на координатной прямой множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $|x+2| \ge a$ и неравенству $x > 0$, в зависимости от значений параметра a.

30 Изобразите на координатной прямой множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $|x+2| \le a$ и неравенству $x > 0$, в зависимости от значений параметра a.

31 Изобразите на координатной прямой множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $|x+2| \le a$ и неравенству $|x-a| > 2$, в зависимости от значений параметра a.

32 Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют системе:

$$\begin{cases} |2x-5| \le 4, \\ |3y+9| \le 2. \end{cases}$$

33 Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $(|x|-2)(|y|-4) < 0$.

34 Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$(|x-1|-2)(|y-3|-4) \ge 0.$$

35 Найдите площадь фигуры, координаты (x, y) которой удовлетворяют неравенству $|x-2| + |y-3| \le 4$.

36 Найдите площадь фигуры, координаты (x, y) которой удовлетворяют неравенству $|2x-6| + |3y-3| \le 6$.

37 Найдите уравнения прямых, проходящих через точку $A(8; 0)$ и имеющих с фигурой, координаты точек которой удовлетворяют равенству $|x| + |y| = 5$, только одну общую точку.

38 Как нужно провести прямую, параллельную оси абсцисс, чтобы она отсекала от множества точек координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству $y \geq |x-2| + 3$, треугольник единичной площади?

39 Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют системе

$$\begin{cases} |y| \leq 2x + 4; \\ |y| \leq -2x + 8. \end{cases}$$

Найдите квадратичную функцию, график которой имел бы с изображенным множеством ровно три общие точки.

40 Найдите все значения буквы a, при которых прямая $y = -2x - 6$ имеет с фигурой, координаты точек которой удовлетворяют равенству $|x| + |y| = a$, а) только одну общую точку; б) ровно две общие точки.

41 Найдите все значения буквы a, при которых существует бесконечно много точек координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют системе:

$$\begin{cases} |x| + |y| = 2a; \\ |x-1| + |y-3| = a. \end{cases}$$

42 Найдите все a, при которых неравенство $\dfrac{2x - a - 1}{x - a} < 0$ выполнено для всех $x \in [5; 7]$.

43 Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $|x^2 + 6x + a| > 8$ не имеет решений на отрезке $[2; 4]$.

44 Найдите все значения параметра a, при которых неравенство

$$(a + x^2)(a + x + 2) < 0$$

не имеет решений на отрезке $[0; 2]$.

$\boxed{\textbf{45}}$ Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ (x-3)^2 + (y+4)^2 = a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$\boxed{\textbf{46}}$ Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} 4|y| - 5|x| = 6 \\ x^2 + y^2 - 10y + 25 - a = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

$\boxed{\textbf{47}}$ Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} 4|y| + 5|x| < 9 \\ 5|y| - 6|x| = a \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

$\boxed{\textbf{48}}$ Найдите все такие значения параметра a, для каждого из которых для уравнения

$$\frac{(x^2 - 5x + 6) \cdot \sqrt{8a^2 - x^3}}{x^4 - (\sqrt{a})^8} = 0$$

число $x = 2$ является корнем уравнения, а число $x = 3$ не является корнем.

$\boxed{\textbf{49}}$ Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{(x - a^2) \cdot (x^3 - a^2 x)}{\sqrt{16 - x^2}} = 0$$

имеет не более трех корней.

$\boxed{\textbf{50}}$ Найдите все значения параметра a, при каждом из которых ровно один корень уравнения

$$\sqrt{a - x} \cdot (x^2 - 2|a|x) = \sqrt{a - x} \cdot (6a^2 - 3|a|x)$$

удовлетворяет условию $|x| < 1$.

8. Основные факты школьной планиметрии

Признаки равенства треугольников

$\boxed{1}$ Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то треугольники равны.

$\boxed{2}$ Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то треугольники равны.

$\boxed{3}$ Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то треугольники равны.

Признаки подобия треугольников

$\boxed{4}$ Если две стороны одного треугольника соответственно пропорциональны двум сторонам другого, а углы, заключенные между этими сторонами, равны, то треугольники подобны.

$\boxed{5}$ Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то треугольники подобны.

$\boxed{6}$ Если три стороны одного треугольника соответственно пропорциональны трем сторонам другого, то треугольники подобны.

$\boxed{7}$ Точка пересечения диагоналей трапеции, точка пересечения продолжений боковых сторон и середины оснований лежат на одной прямой.

Сумма углов треугольника

$\boxed{8}$ Сумма углов треугольника равна 180°.

$\boxed{9}$ Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних не смежных с ним углов.

$\boxed{10}$ Сумма внутренних углов выпуклого n-угольника равна

$$180^\circ \cdot (n-2).$$

11 Угол между биссектрисами смежных углов прямой.

12 Биссектрисы внутренних односторонних углов при параллельных прямых и секущей перпендикулярны.

Равнобедренный треугольник

13 Углы при основании равнобедренного треугольника равны.

14 Медиана равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, является биссектрисой и высотой. Если в треугольнике медиана совпадает с высотой или биссектрисой, то треугольник равнобедренный.

15 Если два угла треугольника равны, то он равнобедренный.

Прямоугольный треугольник

16 Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30^o, равен половине гипотенузы. Если катет прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы, то угол, лежащий против этого катета, равен 30°.

17 Катет прямоугольного треугольника равен произведению гипотенузы на синус противолежащего или на косинус прилежащего к этому катету острого угла.

18 Катет прямоугольного треугольника равен другому катету, умноженному на тангенс противолежащего или котангенс прилежащего к этому катету острого угла.

19 Квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов катетов.

20 Высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное проекций катетов на гипотенузу, а каждый катет есть среднее пропорциональное гипотенузы и своей проекции на гипотенузу.

Медианы, высоты и биссектрисы треугольника

21 Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении $2:1$, считая от вершины. Точка пересечения медиан треугольника называется центроидом этого треугольника.

22 Если медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный.

23 Медиана прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы.

24 Медиана треугольника разбивает его на два равновеликих треугольника.

25 Три медианы треугольника разбивают его на шесть равновеликих треугольников.

26 Каждая точка биссектрисы угла равноудалена от его сторон. Если внутренняя точка угла равноудалена от его сторон, то она лежит на биссектрисе этого угла.

27 Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром вписанной в этот треугольник окружности и называется инцентром.

28 Биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам.

29 Каждая биссектриса треугольника делится точкой пересечения биссектрис в отношении, равном сумме прилежащих сторон к противолежащей, считая от вершины.

30 Все три высоты треугольника или их продолжения пересекаются в одной точке, называемой ортоцентром.

31 Ортоцентр лежит на одной прямой с центроидом, центром описанной окружности и центром окружности девяти точек.

32 Ортоцентр остроугольного треугольника является центром окружности, вписанной в его ортотреугольник.

33 В остроугольном треугольнике ортоцентр лежит внутри треугольника; в тупоугольном — вне треугольника; в прямоугольном — в вершине прямого угла.

Параллельные прямые

$\boxed{34}$ Через данную точку можно провести не более одной прямой, параллельной данной.

$\boxed{35}$ Если при пересечении двух прямых третьей образуются равные внутренние накрест лежащие углы, то прямые параллельны.

$\boxed{36}$ Если две прямые параллельны одной и той же прямой, то они параллельны между собой.

$\boxed{37}$ Две прямые, перпендикулярные одной и той же прямой, параллельны.

$\boxed{38}$ Если две параллельные прямые пересечь третьей, то образованные при этом внутренние накрест лежащие углы равны.

Параллелограмм

$\boxed{39}$ Параллелограмм — четырехугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны.

$\boxed{40}$ Диагональ разбивает параллелограмм на два равных треугольника.

$\boxed{41}$ Противоположные стороны параллелограмма попарно равны.

$\boxed{42}$ Противоположные углы параллелограмма попарно равны.

$\boxed{43}$ Диагонали параллелограмма пересекаются и делятся точкой пересечения пополам.

$\boxed{44}$ Если противоположные стороны четырехугольника попарно равны, то этот четырехугольник — параллелограмм.

$\boxed{45}$ Если две противоположные стороны четырехугольника равны и параллельны, то этот четырехугольник — параллелограмм.

$\boxed{46}$ Если диагонали четырехугольника делятся точкой пересечения пополам, то этот четырехугольник — параллелограмм.

$\boxed{47}$ Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

$\boxed{48}$ Диагонали ромба перпендикулярны.

49 Диагонали ромба делят его углы пополам.

50 Если диагонали параллелограмма перпендикулярны, то этот параллелограмм — ромб.

51 Если диагонали выпуклого четырехугольника делят его углы пополам, то этот параллелограмм — ромб.

Теорема Фалеса

52 Если на одной стороне угла отложить равные отрезки и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую сторону угла, то на второй стороне угла отложатся также равные отрезки.

Середины сторон

53 Средняя линия треугольника параллельна стороне треугольника и равна половине этой стороны.

54 Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

55 Середины сторон четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

56 Отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен полуразности оснований этой трапеции.

Свойства и признаки равнобедренной трапеции

57 Углы при основании равнобедренной трапеции равны.

58 Диагонали равнобедренной трапеции равны.

59 Если углы при основании трапеции равны, то она равнобедренная.

60 Если диагонали трапеции равны, то она равнобедренная.

61 Проекция боковой стороны равнобедренной трапеции на основание равна полуразности оснований, а проекция диагонали — полусумме оснований.

Окружность

62 Диаметр, перпендикулярный хорде, делит ее пополам.

63 Диаметр, проходящий через середину хорды, не являющейся диаметром, перпендикулярен этой хорде.

64 Серединный перпендикуляр к хорде проходит через центр окружности.

65 Равные хорды равноудалены от центра окружности.

66 Хорды окружности, удаленные от центра на равные расстояния, равны.

67 Дуги окружности, заключенные между параллельными хордами, равны.

68 Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром окружности, описанной около треугольника.

69 Линия центров двух пересекающихся окружностей перпендикулярна их общей хорде.

70 Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, — середина гипотенузы.

71 Касательная перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.

72 Если прямая l, проходящая через точку окружности, перпендикулярна радиусу, проведенному в эту точку, то прямая l — касательная к окружности.

73 Если прямые, проходящие через точку M, касаются окружности в точках A и B, то $MA = MB$.

74 Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла.

75 Если в четырехугольник можно вписать окружность, то суммы его противоположных сторон равны.

76 Угловая величина дуги окружности равна угловой величине центрального угла, которому она принадлежит.

77 Вписанный угол равен половине угловой величины дуги, на которую он опирается.

$\boxed{78}$ Угол между пересекающимися хордами равен полусумме противоположных дуг, высекаемых хордами.

$\boxed{79}$ Угол между двумя секущими равен полуразности дуг, высекаемых секущими на окружности.

$\boxed{80}$ Угол между касательной и хордой равен половине угловой величины дуги, заключенной между ними.

$\boxed{81}$ Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.

$\boxed{82}$ Если четырехугольник можно вписать в окружность, то сумма его противоположных углов равна $180°$.

$\boxed{83}$ Если сумма противоположных углов четырехугольника равна $180°$, то около него можно описать окружность.

$\boxed{84}$ Если из одной точки вне окружности проведены к окружности касательная и секущая, то произведение всей секущей на ее внешнюю часть равно квадрату касательной.

$\boxed{85}$ Если в трапецию можно вписать окружность, то радиус окружности есть среднее пропорциональное отрезков, на которые точка касания делит боковую сторону.

Теоремы косинусов и синусов

$\boxed{86}$ Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

$\boxed{87}$ Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

$\boxed{88}$ Отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру окружности, описанной около треугольника (обобщенная теорема синусов):

$$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R.$$

Площадь

89 Площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту:

$$S = \frac{1}{2}ah.$$

90 Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними:

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\alpha.$$

91 Площадь треугольника равна произведению его полупериметра на радиус вписанной окружности:

$$S = pr,$$

где p — полупериметр треугольника.

92 Площадь треугольника равна произведению трех его сторон, деленному на учетверенный радиус описанной окружности:

$$S = \frac{abc}{4R}.$$

93 Формула Герона: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где p — полупериметр треугольника; a, b, c — длины сторон треугольника.

94 Площадь параллелограмма равна произведению основания на высоту:

$$S = ah.$$

95 Площадь параллелограмма равна произведению его соседних сторон на синус угла между ними:

$$S = ab\sin\alpha.$$

96 Площадь прямоугольника равна произведению двух его соседних сторон:

$$S = ab.$$

97 Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей:

$$S = \frac{1}{2}d_1d_2.$$

98 Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту:

$$S = \frac{a+b}{2}h.$$

99 Площадь четырехугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними:

$$S = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\alpha.$$

100 Если в многоугольник можно вписать окружность, то его площадь равна произведению полупериметра многоугольника на радиус этой окружности.

101 Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

102 Площади треугольников, имеющих общий угол, относятся как произведения сторон, образующих этот угол.

103 Площади треугольников, имеющих общую сторону, относятся как высоты, проведенные к этой стороне.

104 Площади треугольников, имеющих общую высоту, относятся как основания, к которым эта высота проведена.

105 Диагонали трапеции разбивают ее на четыре треугольника, два из которых подобны, а два равновелики.

9. Задачи по геометрии из первой части комплексного теста

1 В равнобедренный прямоугольный треугольник вписан квадрат со стороной 2 см так, что две его вершины лежат на гипотенузе, а две другие лежат на катетах. Найдите высоту треугольника, опущенную на гипотенузу. Ответ дайте в сантиметрах.

2 В равнобедренном треугольнике ABC заданы длины основания $AC = 6$ и боковой стороны $AB = 5$. Найдите высоту треугольника, проведенную к боковой стороне.

3 Диагонали AC и BD четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке K. Площади треугольников ABK, BCK и CDK равны 6, 8 и 5 соответственно. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$.

4 В прямоугольном треугольнике ABC проведена медиана CM из вершины прямого угла. Найдите высоту треугольника BCM, проведенную к стороне BC, если известны длины катета $BC = 12$ и гипотенузы $AB = 13$.

5 В прямоугольном треугольнике ABC угол $\angle A$ равен $30°$, BK — биссектриса, проведенная из вершины острого угла $\angle B$. Известно, что $CK = 8$. Найдите AK.

6 В равнобедренном треугольнике ABC угол при основании AC равен $30°$. Найдите высоту треугольника, проведенную из вершины A, если $AC = 4$.

7 Ширина прямоугольника на 2 м меньше его длины. Если ширину прямоугольника увеличить на 3 м, а длину на 8 м, то его площадь увеличится в 3 раза. Найдите периметр прямоугольника.

8 Радиус вписанной в правильный треугольник окружности равен $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. Найдите площадь треугольника S. В ответе запишите значение выражения $\dfrac{S}{\sqrt{3}}$.

9 Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равен 4. Один из катетов равен 9. Найдите площадь треугольника.

10 Точка касания окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, делит гипотенузу на отрезки 3 и 10. Найдите площадь треугольника.

11 Найдите площадь прямоугольного треугольника, если его катет и гипотенуза равны 6 и 10.

12 Медиана равностороннего треугольника равна $12\sqrt{3}$. Найдите его сторону.

13 В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 30, а катеты относятся как $12 : 9$. Найдите отношение меньшего катета к гипотенузе.

14 В прямоугольном треугольнике катеты равны 5 и 12. Найдите длину медианы, проведённой к гипотенузе.

15 В прямоугольном треугольнике катет равен 4, а радиус описанной окружности равен $\sqrt{5}$. Найдите второй катет.

16 В прямоугольном треугольнике катет 2, а медиана, проведенная к гипотенузе, $\sqrt{5}$. Найдите второй катет.

17 В прямоугольном треугольнике катеты равны 5 и 12. Чему равен радиус окружности, описанной около этого треугольника?

18 В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 5, а синус острого угла 0,6. Чему равна площадь этого треугольника?

19 Периметр прямоугольного треугольника равен 24 см, а разность длин катетов — 2 см. Найдите гипотенузу. Ответ дайте в сантиметрах.

20 Периметр прямоугольного треугольника равен 24 см. Гипотенуза больше одного из катетов на 2 см. Найдите длину гипотенузы. Ответ дайте в сантиметрах.

21 В прямоугольном треугольнике катеты равны 5 и 12. Чему равен радиус вписанной в треугольник окружности?

22 В прямоугольном треугольнике катеты равны 5 и 12. Чему равна высота, проведенная к гипотенузе? Ответ округлите до сотых.

23 В прямоугольном треугольнике катеты равны 8 и 15. Чему равен синус большего острого угла треугольника? Ответ округлите до сотых.

24 Найдите площадь прямоугольного треугольника, если его катет и медиана, проведенная к гипотенузе, равны 5 и 6,5 соответственно.

25 Найдите периметр равностороннего треугольника, если радиус описанной около него окружности равен $2\sqrt{3}$.

26 Найдите радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами 24 и 10.

27 В прямоугольном треугольнике сумма длин катетов равна 13, а площадь равна 12. Найдите длину гипотенузы.

28 Радиус вписанной в равносторонний треугольник окружности равен $\sqrt{3}$. Найдите периметр треугольника.

29 Площадь прямоугольного треугольника равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Один из острых углов равен 30°. Найдите длину гипотенузы.

30 Один из катетов прямоугольного треугольника равен 10. Радиус окружности, описанной около этого треугольника, равен 13. Найдите радиус вписанной окружности.

31 Один из катетов прямоугольного треугольника равен 8. Медиана, проведённая к гипотенузе, равна 8,5. Найдите радиус вписанной окружности.

32 Найдите радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами 13, 24 и 13.

33 В параллелограмме $ABCD$ диагональ BD перпендикулярна основанию AD, угол равен 135°, площадь параллелограмма равна 49. Найдите сторону AD параллелограмма.

34 В параллелограмме $ABCD$ диагональ BD перпендикулярна основанию AD, угол равен 135°, площадь параллелограмма равна 64. Найдите сторону AD параллелограмма.

35 Вычислите площадь прямоугольной трапеции с основаниями 3 и 7 и острым углом 60°.

36 В треугольнике один из углов в 3 раза больше другого, а разность этих углов 45°. Найдите медиану, проведенную из вершины третьего угла, если большая сторона треугольника равна 13,5.

37 В треугольнике один из углов в 5 раз меньше другого, а разность этих углов 60°. Найдите медиану, проведенную из вершины третьего угла, если большая сторона треугольника равна 11,7.

38 Окружность с центром A и радиусом 2,5 проходит через вершину B параллелограмма $ABCD$ и касается диагонали BD. Известно, что $BC = 6,5$. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

39 Окружность вписана в прямоугольную трапецию. Известно, что больший угол этой трапеции равен 150°, а одно из оснований больше другого на $8\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности.

40 Найдите квадрат радиуса вписанной окружности равностороннего треугольника, сторона которого равна 6.

Примеры вступительных испытаний

Варианты задач по математике первой части комплексного теста. 10-й класс

Вариант 1

1 Вычислите $101 \cdot \left(\dfrac{7}{7+5\sqrt{6}} + \dfrac{7}{7-5\sqrt{6}}\right)$.

2 Совокупный доход семьи из трех человек в феврале 2022 года составил 150 000 руб. Известно, что 36 000 руб. было потрачено на продукты питания, 15% — на оплату коммунальных услуг, 10% было отложено на счет в банке, остальное составили прочие расходы. Сколько рублей составили прочие расходы в феврале 2022 года?

3 Решите неравенство

$$(3x+1)^2 - (x+2)\cdot(4x-1) > 5\cdot(x-1)^2 + 6x.$$

В ответе укажите наибольшее целое число, не являющееся решением данного неравенства.

4 В верном равенстве заменили все цифры буквами (одинаковые цифры заменены одинаковыми буквами, разные цифры — разными). Получилось равенство

$$\text{АЙ} + \text{АЙ} + \text{АЙ} = \text{ЛАЙ}$$

Восстановите исходное равенство. В ответе укажите число, заменённое на «ЛАЙ».

5 В равнобедренную трапецию с боковой стороной 10 можно вписать окружность радиуса 3. Найдите площадь этой трапеции.

6 Паша выписал в ряд числа так, что получилась арифметическая прогрессия. Известно, что сумма пятого, девятого, двадцатого и двадцать четвертого членов равна 40. Найдите сумму первых 28 чисел этой прогрессии.

$\boxed{\mathbf{7}}$ Найдите сумму всех целых чисел из области определения функции

$$f(x) = \sqrt{36 - x^2} + \sqrt{5 - x} + \frac{1}{2 - |x - 1|}.$$

$\boxed{\mathbf{8}}$ При всех допустимых значениях переменной упростите выражение

$$\sqrt{18}(\sqrt{x} - 3)\sqrt{2x + 18 + 12\sqrt{x} - 6x}.$$

$\boxed{\mathbf{9}}$ В треугольнике SWT проведена высота WP. Известно, что точка P лежит между точками S и T. Окружность радиуса 9 проходит через точки S и P и касается прямой WT в точке W. Найдите длину отрезка SP, если сторона WT равна 24.

$\boxed{\mathbf{10}}$ При каких значениях параметра a уравнение

$$((a - 1)x^2 - 2ax + 4)(x - 4) = 0$$

имеет ровно два различных корня? В ответе укажите сумму всех таких значений a.

Вариант 2

$\boxed{\mathbf{1}}$ Найдите значение выражения $11 : (2,65 : 2,5 - 1,1)$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Ежемесячный доход семьи равен 95 000 руб. Известно, что 40% этой суммы составляет заработная плата Татьяны. В результате кризиса её заработная плата снизилась на 10%. На сколько процентов снизился общий доход семьи, если доходы остальных членов семьи не изменились?

$\boxed{\mathbf{3}}$ Решите неравенство $\dfrac{5x - 2}{4} - \dfrac{3 - x}{5} > \dfrac{1 - x}{10}$. В ответе укажите сумму квадратов трех наименьших целых решений неравенства.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Представьте число 1,2 в виде суммы четырёх различных обыкновенных дробей с числителями 1 и натуральными знаменателями, большими 1. В ответе укажите сумму этих знаменателей.

$\boxed{\mathbf{5}}$ В параллелограмме $MFKT$ угол T равен 135°, сторона KT равна 14, а диагональ FT перпендикулярна стороне FK.

Найдите площадь параллелограмма $MFKT$.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Незнайка выписал арифметическую прогрессию, первый член которой равен -200, а каждый следующий член на 4 больше предыдущего. Какое наименьшее количество первых членов прогрессии нужно взять, чтобы их сумма была положительной?

$\boxed{\mathbf{7}}$ Найдите наименьшее целое число из области определения функции

$$f(x) = \frac{\sqrt{-7x^2 - 15x + 22}}{|2x+3| - 2} - \sqrt{-x}.$$

$\boxed{\mathbf{8}}$ При всех допустимых значениях переменной упростите выражение

$$\frac{9x + 6\sqrt{x} + 1}{3x - 8\sqrt{x} - 3} : \left(\frac{3 - \sqrt{x}}{6\sqrt{x} + 2}\right)^{-1}.$$

$\boxed{\mathbf{9}}$ Окружность радиуса 3,5 вписана в треугольник KLT и касается сторон KT и KL соответственно в точках A и B. Известно, что $TA : AK = 1 : 2$, $KB : BL = 2 : 3$. Найдите наибольшую сторону треугольника KLT.

$\boxed{\mathbf{10}}$ При каких значениях параметра a уравнение

$$ax^2 - 6(2a+1)x + 36(a+1) = 0$$

имеет ровно два различных корня, один из которых втрое больше другого? В ответе укажите произведение всех таких значений a.

Вариант 3

$\boxed{\mathbf{1}}$ Найдите значение выражения $58 \cdot \left(\left(2\frac{1}{14}\right)^{-2} - \left(1\frac{14}{15}\right)^{-2}\right)$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Технология обработки сырья позволяет в три этапа снизить содержание примесей. На первом этапе содержание примесей снижается на 60%, на втором – на 37,5%, на третьем – на 20%. Сколько составит масса примесей (в кг) после третьего этапа обработки, если изначально масса примесей составляла 350 кг?

3 Решите неравенство

$$(5x-2,3)^2-(5x+\sqrt{5})^2>0.$$

В ответе укажите наибольшее целое число, являющееся решением неравенства.

4 Замените все буквы цифрами (одинаковые буквы — одинаковыми цифрами, разные буквы — разными), чтобы разность

$$\text{ЛИЦЕЙ} - \text{ОГОНЬ}$$

приняла наибольшее возможное значение. В ответе укажите это значение.

5 Треугольник MPK равнобедренный. Известно, что MK — основание, угол при котором равен $75°$. Найдите длину стороны MP, если высота, проведенная к этой стороне, равна 18.

6 Просуммировав первые пятнадцать членов арифметической прогрессии, Катя получила 20, а просуммировав первые двадцать её членов, получила 15. Найдите сумму первых тридцати пяти членов этой прогрессии.

7 Найдите наименьшее целое число из области определения функции

$$f(x)=\sqrt{-x^2+17|x|-16}.$$

8 При всех допустимых значениях переменной упростите выражение

$$\frac{9a+27\sqrt{a}}{\sqrt{a}+3}-\frac{\sqrt{3a+6\sqrt{a}+3}}{(\sqrt{27})^{-1}}.$$

9 В треугольнике FGT угол T равен $90°$, $FT=28$ и $GT=21$. Окружность с центром O касается катетов треугольника FGT, причем точка O принадлежит гипотенузе FG. Найдите радиус окружности.

10 При каких значениях параметра a уравнение

$$\frac{x^2 - 4a^2 - 4a - 1}{x^2 - (a+4)x + 4a} = 0.$$

имеет единственный корень? Если таких значений несколько, то в ответе укажите наименьшее из них.

Вариант 4

1 Найдите значение выражения $\dfrac{-7(3^{-2} + 5^0)}{(0,5)^{-2} - (-3)^{-2}}$.

2 В колбе содержалось 125 мл 80%-го раствора кислоты. Провизор долил в колбу столько же 60%-го раствора кислоты и 30 мл воды. Определите процентную концентрацию кислоты в полученном растворе.

3 Решите неравенство $(\sqrt{x+2} + 1) \cdot (7,3x - 20) \leq 0$.

4 Игнат заменил в нескольких двузначных числах все цифры буквами, причём одинаковые цифры — одинаковыми буквами, а разные разными. У него получилось, что

$$\text{УХ} > \text{ОХ},\ \text{ОЙ} > \text{АЙ},\ \text{ОП} > \text{ОЙ},\ \text{ЭХ} > \text{ЭЙ},\ \text{ДА} > \text{ГА},\ \text{АХ} > \text{ЭХ},\ \text{АЙ} > \text{АУ},\ \text{ХА} > \text{ПА},\ \text{ГО} > \text{ХО}.$$

Какое число он заменил на ДА?

5 В остроугольном треугольнике PQT известны стороны $PQ = 8$, $QT = 13$, высота $QH = 5$. Найдите радиус описанной около треугольника PQT окружности.

6 Арифметическая прогрессия содержит 40 членов, сумма всех членов, номера которых кратны двум, на 100 больше, чем сумма оставшихся членов. На сколько каждый следующий член прогрессии отличается от предыдущего?

7 Найдите сумму трёх наименьших целых чисел из области определения функции

$$f(x)=\frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{2-x}}{x^2+|x|-6}.$$

8 При всех допустимых значениях переменной упростите выражение

$$\frac{\sqrt{y}}{2}-\left(\frac{\sqrt{12}}{2\sqrt{3y}-\sqrt{3}}\right)^{-1}\cdot\frac{2y+7\sqrt{y}-4}{4y-4\sqrt{y}+1}.$$

9 В треугольнике PKT со сторонами $PK=12$, $PT=15$, $KT=18$ PF — биссектриса угла. Окружность, описанная около треугольника PKF, пересекает сторону PT в точке M. Найдите периметр треугольника MFT.

10 При каких значениях параметра a уравнение

$$(x^2-(6a-2)x+8a^2-4a)(x^2-7x+12)=0$$

имеет ровно три различных корня? В ответе укажите сумму всех таких значений a.

Вариант 5

1 Решите уравнение $\frac{5}{27}\cdot(5,4-8,1y)=0,03+\frac{4}{17}\cdot(6,8-3,4y)$.

2 Право на участие в голосовании имели 350 тысяч жителей города. К 12 часам проголосовало 10% избирателей. Количество проголосовавших с 12 до 15 часов оказалось втрое больше, чем количество проголосовавших к 12 часам. Сколько процентов избирателей еще не проголосовало к 15 часам?

3 Решите неравенство $(2\sqrt{3}-1)x>2\sqrt{3}+1$.

4 Антон, Борис и Валентин ели пирожки. Каждый из них съел целое количество пирожков, при этом Антон съел больше всех — 12. Если бы Антон отдал по одному пирожку Борису и Валентину, то больше всех пирожков съел бы Борис, а Валентину досталась бы ровно треть от всех съеденных пирожков. Сколько всего пирожков было съедено?

5 В прямоугольном треугольнике катеты равны 6 и $2\sqrt{3}$. Найдите биссектрису угла треугольника, проведенную к большему из катетов.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Значения температур (в градусах Цельсия) в городе за 21 день образуют арифметическую прогрессию. Известно, что сумма температур за все дни с нечётными номерами на 15 больше суммы температур за все дни с чётными номерами. Какая температура была в городе на 12-й день, если известно, что температура на 20-й день в три раза больше температуры на 9-й день?

$\boxed{\mathbf{7}}$ Найдите сумму трёх наибольших целых чисел из области определения функции

$$f(x) = \sqrt{|x^2 - 16| \cdot (3 - x)} + \frac{1}{(x-1)^2}.$$

$\boxed{\mathbf{8}}$ При всех допустимых значениях переменной упростите выражение

$$\left(\frac{a - \sqrt{3a} + \sqrt{a} - \sqrt{3}}{\sqrt{a} + 1}\right)^2 \cdot (4a - 8\sqrt{3a} + 12)^{-1}.$$

$\boxed{\mathbf{9}}$ Через точку M, лежащую вне окружности с радиусом 9, проведена касательная MK (K — точка касания) и секущая MF (точка F лежит на окружности). Центр окружности лежит на прямой MF между точками M и F. Найдите площадь треугольника MFK, если известно, что $MF = 24$.

$\boxed{\mathbf{10}}$ При каких значениях параметра a наибольший из корней уравнения

$$((a+1)x^2 - (6a+8)x + 12)(x-2) = 0$$

больше наименьшего ровно в 4 раза? В ответе укажите произведение всех таких значений a.

Вариант 6

$\boxed{\mathbf{1}}$ Решите уравнение $\dfrac{4}{11} \cdot \left(1,5 \cdot \left(\dfrac{y-1}{3} + 5\right) + 3\right) - 2 - y = 0.$

2 Сергей положил в начале 2022 года на счет в банке 100 тыс. руб. под 20% годовых. В конце 2022 года после начисления процентов он внес на счет 20 тыс. руб. В конце 2023 года после начисления процентов Сергей снял деньги со счета. Сколько денег (в тыс. руб.) снял Сергей со счета в конце 2023 года?

3 Решите неравенство $(5x-2\sqrt{3})^2 \leq x\cdot 10\sqrt{3}-15$.

4 В строке

П>О>Л>У<П>О>С<Т<У<П<И>Л

замените все буквы цифрами (одинаковые буквы — одинаковыми цифрами, разные буквы — разными), чтобы все неравенства выполнялись, а число СТОП было максимально возможным. В ответе укажите, чему равно число СТОП.

5 Диагонали трапеции $MPQR$ пересекаются в точке D (MR и PQ — большее и меньшее основания соответственно). Известно, что площадь трапеции равна 98 и $PD : DR = 2 : 5$. Найдите площадь треугольника MPD.

6 Сергей Александрович выписал на доску все трехзначные числа, делящиеся на 36. Какова их сумма?

7 Найдите сумму всех целых чисел из области определения функции

$$f(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{|x|-3}+\sqrt{20-x-x^2}.$$

8 При всех допустимых значениях переменной упростите выражение

$$\frac{(y-7\sqrt{y}+12)\sqrt{y+8\sqrt{y}+16}}{12-4\sqrt{y}}+\left(\frac{1}{0,5\sqrt{y}}\right)^{-2}.$$

9 Сторона KL треугольника KLM равна 3, а угол KLM равен 120°. Прямая, проходящая через точку K перпендикулярно биссектрисе угла KLM, делит сторону LM в отношении $3:2$, считая от точки L. Найдите длину отрезка KM.

$\boxed{10}$ При каких значениях параметра a уравнение

$$\frac{(ax^2 - a^3)(x^2 - 4x - 5)}{x^2 + ax + a - 1} = 0$$

имеет ровно два различных корня? В ответе укажите произведение всех таких значений a.

Варианты задач по математике второй части комплексного теста. 10-й класс

Вариант 1

$\boxed{1}$ Найдите все значения x, для каждого из которых имеет смысл выражение:

$$\frac{4x + 2}{\sqrt{10 - x^2 - 3x} + \sqrt{x^2 + x - 6}}.$$

$\boxed{2}$ В начале первого года в банк был внесен вклад величиной 2000 руб. За первый год хранения сумма вклада в банке увеличилась на 200 руб. Известно, что доход по вкладу начисляется в конце каждого года и прибавляется к вкладу. На сколько рублей увеличится вклад за три года хранения, если процентная ставка по вкладу остается постоянной в течение всего срока хранения и вкладчик не проводит операций по вкладу?

$\boxed{3}$ Найдите все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} ax + 4y = a^2 \\ x + ay = 2 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

$\boxed{4}$ Окружность вписана в равнобедренную трапецию. Боковая сторона трапеции делится точкой касания на отрезки длиной 4 и 6. Найдите площадь трапеции.

$\boxed{5}$ Найдите все значения a, при которых уравнение

$$(x+2)|x-4| = x - 2a$$

имеет ровно три различных корня.

Вариант 2

$\boxed{1}$ Решите неравенство

$$\frac{x^6}{41-(x-5)^2-10x} \leq 0.$$

$\boxed{2}$ Стоимость 70 экземпляров первого тома книги и 60 экземпляров второго тома составляла 230 тыс. руб. В действительности за все эти книги уплатили 191 тыс. руб., так как была произведена скидка: на первый том — 15%, а на второй том — 20%. Найдите первоначальную цену каждого из томов.

$\boxed{3}$ Найдите все значения параметра a, при которых прямая

$$\left(\frac{1}{a}-1\right)x - y - 2 = 0$$

пересекает прямую $x - y + 1 = 0$ в точке, лежащей на оси Ox.

$\boxed{4}$ В равнобедренную трапецию, боковая сторона которой равна 4 см, вписана окружность радиуса r. Найдите r, если диагональ трапеции равна 5 см.

$\boxed{5}$ Пятый член геометрической прогрессии равен наибольшему значению функции $y = x^2 - 2x + a$ на отрезке $x \in [0;3]$, первый член прогрессии равен наименьшему значению указанной функции на всей числовой оси. Найдите все значения параметра a, при которых третий член прогрессии равен $2\sqrt{3}$.

Вариант 3

$\boxed{1}$ Найдите все значения x, для каждого из которых имеет смысл выражение:

$$\frac{\sqrt{2x^2-5x-3}}{3x-9}.$$

$\boxed{2}$ Объем продаж некоторой компании в 2014, 2015 и 2016 годах представлен тремя последовательными членами геометрической прогрессии. Известно, что в 2014 году объем продаж составил 1,6 млн руб., а суммарный объем продаж за три указанных года составил 7,6 млн руб. Предположительно, объем продаж компании в 2017 году будет следующим по порядку членом этой же прогрессии. Найдите объем продаж компании в 2017 году.

$\boxed{3}$ Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} ax-4y=a+1, \\ x-ay=-1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$\boxed{4}$ В трапеции $ABCD$ известны длины оснований $AD=26$ и $BC=10$. Найдите площадь трапеции, если известно, что ее диагонали перпендикулярны боковым сторонам.

$\boxed{5}$ Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\frac{(a+2)x^2-4x+5}{x+2}=0$$

имеет единственное решение.

Вариант 4

$\boxed{1}$ Найдите область определения функции

$$y=\frac{\sqrt{9x-3x^2}}{(4-x^2)(2x-1)}.$$

2 В начале года Никита внес на вклад в банке 20 000 руб. под 10% годовых сроком на два года. Банк начисляет проценты по вкладу в конце года. В середине второго года Никита внес на вклад некоторую дополнительную сумму. В итоге после двух лет на его вкладе было 32 450 руб. Какую дополнительную сумму внес Никита?

3 Найдите все значения параметра a, при которых прямые

$$2x + y - 4 = 0 \text{ и } (a+8)x + (a^2-1)y - 2 = 0$$

параллельны.

4 В равнобедренной трапеции $ABCD$ с большим основанием AD угол при вершине D равен 60°. Известно, что $AC = 30$, а диагональ трапеции перпендикулярна боковой стороне. Найдите радиус описанной около трапеции окружности и площадь трапеции.

5 Найдите все значения параметра a, при которых графики функций

$$y = -x^2 + 6|x| - a \text{ и } y = x + a^2$$

пересекаются ровно в четырех точках.

Вариант 5

1 Найдите все значения x, для каждого из которых имеет смысл выражение:

$$\frac{\sqrt{x+7}}{\sqrt{x^2+5x}+\sqrt{4x-x^2}}.$$

2 Банк А предлагает открыть вклад с процентной ставкой 60% годовых, а банк Б — с процентной ставкой 40% годовых. Вкладчик часть своих денег положил в банк А, а остальные — в банк Б. Через два года суммарное число вложенных денег удвоилось (годовая процентная ставка не менялась, доход по вкладу начислялся в конце каждого года и прибавлялся к вкладу). Какую долю своих денег вкладчик положил в банк А?

$\boxed{3}$ Найдите все значения параметра a, при которых решения системы уравнений

$$\begin{cases} 3x + 2y = 15a \\ ax + y = 6 \end{cases}$$

удовлетворяют условию $x = y$.

$\boxed{4}$ В трапеции $ABCD$ заданы основания $BC = 4$, $AD = 16$ и диагональ $AC = 8$. 1. Докажите, что треугольник ABC подобен треугольнику ACD. 2. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $\angle DAC = 60°$.

$\boxed{5}$ Найдите все значения параметра a такие, что уравнение

$$\frac{(x^2 - x - 6)(x^2 - x - 2)}{x^2 - 4} = a$$

имеет единственное решение или не имеет решений.

Вариант 6

$\boxed{1}$ Найдите все значения x, для каждого из которых имеет смысл выражение:

$$\frac{x^2 + 2x - 3}{\sqrt{10 - 7x^2 - 3x} + \sqrt{2 - x - x^2}}.$$

$\boxed{2}$ В банк положили 20 000 руб. под $n\%$ годовых, через три года на счету оказалось 26 620 руб. Какова процентная ставка?

$\boxed{3}$ Найдите значение параметра a такое, что система уравнений

$$\begin{cases} ax + 8y = 4 \\ 2x + ay = 2 \end{cases}$$

не имеет решений.

$\boxed{4}$ Через вершину A треугольника ABC ($AB = BC = 5$, $AC = 6$) провели прямую, перпендикулярную AB, а через вершину C прямую, перпендикулярную BC. Эти прямые пересеклись в точке D. 1. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ можно вписать в окружность. 2. Найдите радиус этой окружности.

$\boxed{5}$ Найдите все значения параметра a такие, что уравнение

$$|x^2 + 2x + a| = 2$$

имеет ровно три различных решения.

Вариант 7

$\boxed{1}$ Найдите область определения функции

$$y = \frac{\sqrt{9x - 3x^2}}{(4 - x^2)(2x - 1)}.$$

$\boxed{2}$ Татьяна Петровна взяла кредит в банке «ЧП» на сумму 331 000 рублей на 3 года под 10% годовых. Условия оплаты таковы: Татьяна Петровна после начисления банком процентов на остаток долга переводит в банк фиксированную в договоре сумму и в результате выплачивает весь долг тремя равными платежами. Найдите величину этой фиксированной суммы.

$\boxed{3}$ Найдите все значения параметра a, при которых прямые

$$(a + 8)x + (a^2 - 1)y - 2 = 0 \text{ и } 2x + y - 4$$

параллельны.

$\boxed{4}$ В равнобедренной трапеции $ABCD$ с большим основанием AD угол при вершине D равен 60°. Известно, что $AD = 30$, $CD = 15$. Докажите, что диагональ трапеции перпендикулярна боковой стороне, и найдите радиус описанной около трапеции окружности.

$\boxed{5}$ Найдите все значения параметра a, при которых графики функций $y = x^2 - 2a|x| + 4$ и $y = |x| - a^2$ пересекаются ровно в четырех точках.