

Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»
Лицей

Индивидуальная выпускная работа

Стратификация пространств многочленов одной переменной

Выполнил Попов Андрей Станиславович

Научный консультант:
Шабат Георгий Борисович

Москва
2023

Содержание

1 Введение	2
1.1 Общий обзор	2
1.2 Цель исследования и ключевая гипотеза	3
2 Многочлены 1-й и 2-й степеней	4
2.1 Многочлены 1-й степени	4
2.2 Многочлены 2-й степени	4
3 Многочлены 3-й степени	5
4 Многочлены 4-й степени	8
5 Многочлены 5-й степени и их аналоги	14
5.1 Определение форм	14
5.2 Наблюдения	18
5.3 Модули. Аналоги графиков 5-й степени	20
6 Заключение	26
7 Приложение	27
7.1 Формула Кардано	27
7.2 Треугольник Эйлера-Бернулли	27

1 Введение

1.1 Общий обзор

Термин «стратификация» используется в многих науках и сферах, например, в математике, географии и медицине. Стратификация происходит от латинских слов «stratum» и «facio», что буквально переводится, как «слой» и «делать» соответственно. В математике стратификация – разбиение на непересекающиеся множества. Одна из проблем, связанных с данной работой, является исследование форм графиков, а после разбиение (стратификация) пространств многочленов разных степеней по формам их графиков. Задача, связанная с этой – рассмотрение точек пересечения рассматриваемых графиков с горизонтальными прямыми, то есть качественное исследование полиномиальных уравнений с одной неизвестной.

Ещё до нашей эры люди умели решать квадратные уравнения для практических целей, например, связанных с нахождением площадей земельных участков. Но не были найдены записи, как методы решений бытовых задач, связанных с математикой, были выведены. В начале VI века н. э. был установлен один из известных выводов формулы для нахождения корней квадратного многочлена, который принадлежит индийскому учёному Брахмагупте (алгоритм нахождения корней описан в главной его работе, Брахмаспхунасидханте) [1, с. 111].

К многочленам третьей степени пытались подойти многие, но все вплоть до XVI века приходили к выводу, что это сделать невозможно. Лука Пачоли (1445–1514, итальянский математик, имевший большой авторитет) сравнил сложность решения кубических уравнений с квадратурой круга (как теперь известно, нерешаемая задача, заключающаяся в построении при помощи циркуля и линейки квадрата с площадью, равной площади данного круга). *«Нашелся человек, которого мнение Пачоли не остановило. Это был профессор математики в Болонье Сципион дель Ферро (1465 – 1526); он нашел способ решать уравнения $x^3 + ax = b$. Отрицательными числами тогда еще не пользовались и, например, уравнение $x^3 = ax + b$ воспринималось как совсем другое! Об этом решении известны лишь косвенные сведения»* [2, с. 15].

Вскоре во время поединка по решению задач между Сципионом Дель Ферро и Никколо Тартальей, последний вывел метод решения уравнений третьей сте-

пени, но держал свой метод в секрете. Одному выдающемуся человеку всё-таки удалось уговорить Тарталью рассказать свой метод. Им был Джероламо Кардано (1501-1576), который позже сумел вывести формулу для корней многочленов третьей степени вида $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ (формула Кардано представлена в исследовании). Стоит отметить, что, помимо вещественных решений, Кардано рассматривал и наличие комплексных корней.

Математикам XVI века, а точнее Лодовико Феррари, одному из лучших учеников Кардано, удалось также разрешить вопрос об уравнении четвёртой степени вида $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, которое можно свести к виду $x^4 + px^2 + qx + r = 0$. «Согласно методу Феррари, решение уравнения четвертой степени сводится к решению вспомогательного кубического уравнения и двух квадратных уравнений» [2, с. 31].

По теореме Абеля – Руффини для общего уравнения степени больше четвёртой невозможно указать формулу для корней, содержащую только арифметические операции и операцию извлечения корней.

Поиск и нахождение корней уравнений разных степеней помогают структурировать знания, глубже разобраться в многочленах и их свойствах. Сейчас у нас есть важные и полезные инструменты – вычислительные машины (в частности, персональные компьютеры) и Интернет. Благодаря им возможна визуализация некоторых математических объектов и процессов (например, изменение графика многочлена от изменения коэффициента), быстрый счёт и многое другое. А опираясь на знания, полученные учёными ранее, открыт путь для изучения нового.

1.2 Цель исследования и ключевая гипотеза

Целью данного исследования является доказательство гипотезы о том, что формы графиков функций с фиксированным количеством участков возрастания и убывания (сумма количеств участков возрастания и убывания назовём *сложностью*) реализуются формами графиков многочленов и кусочно-линейных функций. В ходе исследования перечислены формы графиков функций ограниченной сложности. Указанные количества быстро возрастают, в чём можно убедиться, обратившись к треугольнику Эйлера-Бернулли (см.раздел 7.2) . В связи с этим их перечисление при большей сложности становится затруднительным. В исследовании рассматриваются формы графиков многочленов степени ≤ 5 .

2 Многочлены 1-й и 2-й степеней

2.1 Многочлены 1-й степени

Изучение графиков начнём с многочленов 1-й степени. Формула для произвольного многочлена 1-й степени выглядит так:

$$f(x) = kx + b, \text{ где } k \neq 0.$$

График такой функции – прямая. Если $k < 0$, то функция убывает.

Если $k > 0$, то функция возрастает. От свободного члена b форма графика не зависит.

Соответствующие графики имеют одно пересечение с осью x при $k \neq 0$, а при $k = 0$ может иметь бесконечное количество пересечений ($b = 0$) или не иметь их вовсе ($b \neq 0$)

2.2 Многочлены 2-й степени

Общий вид многочлена 2-й степени:

$$ax^2 + bx + c, \text{ где } a \neq 0.$$

Если $a > 0$, график - парабола с «ветвями вверх».

Если $a < 0$, график - парабола с «ветвями вниз».

Отметим, что от коэффициента b зависит скорость изменения расстояния между точками с одинаковым значением по вертикальной оси, принадлежащими разным «ветвям» параболы, а также координаты её вершины. От коэффициента c зависит смещение по оси y . Но b и c не влияют на форму графика.

Для многочлена 2-й степени существует выражение, которое обращается в ноль тогда и только тогда, когда два корня совпадают. Такое выражение называется *дискриминантом*, и для многочлена второй степени оно выглядит так:

$$D_2 = b^2 - 4ac.$$

Аналогичные многочлены, зависящие от коэффициентов уравнения, существуют и для других степеней – они равны 0 тогда и только тогда, когда многочлены имеют кратные корни (см. «Многочлены 3-й степени»).

При $D_2 < 0$ график не имеет пересечений с осью x , при $D_2 = 0$ график имеет одну точку пересечения с осью x , а при $D_2 > 0$ график имеет две точки пересечения с осью x .

3 Многочлены 3-й степени

Общий вид:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d, \text{ где } a \neq 0.$$

Теорема 1. Любой многочлен 3-й степени можно привести к виду $x^3 + px + q$.

Доказательство. Произведём следующие преобразования, предварительно для удобства заменив b и c на $3b$ и $3c$ соответственно.

$$\begin{aligned} ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d &= 0 \\ a \left(x^3 + 3\frac{b}{a}x^2 + 3 \left(\frac{b}{a} \right)^2 x + \left(\frac{b}{a} \right)^3 \right) - 3\frac{b^2}{a}x - \frac{b^3}{a^2} &= 0 \\ a \left(x + \frac{b}{a} \right)^3 + 3 \left(c - \frac{b^2}{a} \right) x + d - \frac{b^3}{a^2} &= 0 \end{aligned}$$

Введём замену: $x + \frac{b}{a} = y \Leftrightarrow x = y - \frac{b}{a}$

$$ay^3 + 3 \left(c - \frac{b^2}{a} \right) y - 3\frac{bc}{a} + 3\frac{b^3}{a^2} + d - \frac{b^3}{a^2} = 0 | : a$$

$$y^3 + 3 \left(\frac{c}{a} - \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right) y - 3\frac{bc}{a^2} + 2 \left(\frac{b}{a} \right)^3 + \frac{d}{a} = 0$$

Введём замену: $p = \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{a} \right)^2$, $q = -3\frac{bc}{a^2} + 2 \left(\frac{b}{a} \right)^3 + \frac{d}{a}$.

Получим:

$$y^3 + 3py + q = 0. \blacksquare$$

Отметим, что корни многочлена 3-й степени находятся по формуле Кардано (см. 7.1).

Введём необходимую терминологию. Промежутки убывания функции будем называть *склонами*, промежутки возрастания – *подъёмами*, минимумы – *ямами*, максимумы – *вершинами*, а значение вершин и ям по вертикальной оси – соответственно *высотами* и *глубинами*.

Перечислим формы графиков многочленов 3-й степени:

3.1 С двойным изгибом, с одной ямой.

3.2 С плавным изгибом, без ям.

У первой формы графика возможно одно, два (их на самом деле три, два из которых совпадают) или три пересечения с горизонтальной осью. Найдём условие для наличия двух совпадающих решений. По теореме Безу, если у многочлена есть корень a , то $(x - a)$ является делителем данного многочлена. Пусть корнями многочлена 3-й степени являются числа x_1 и x_2 . Тогда данный многочлен можно разложить на множители следующим образом: $(x - x_1)(x - x_2)^2$. Раскроем скобки:

$$(x - x_1)(x^2 - 2x_2x + x_2^2) = x^3 - 2x^2x_2 + xx_2^2 - x^2x_1 + 2xx_1x_2 - x_1x_2^2 =$$

$$= x^3 + x^2(-2x_2 - x_1) + x(x_2^2 + 2x_1x_2) - x_1x_2^2$$

Сопоставим получившееся выражение с видом многочлена третьей степени, применив теорему о тождественности многочленов. Получим систему:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_2^2 + 2x_1x_2 = p \\ -x_1x_2^2 = q \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения x_1 через x_2 и подставим в оставшиеся два, получим:

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 \\ p = -3x_2^2 \\ q = 2x_2^3 \end{cases}$$

Получаем следующее соотношение $\frac{q}{p} = -\frac{2}{3}x_2$. Но также $x_2 = \sqrt[3]{\frac{q}{2}}$. Тогда получим:

$$\frac{q}{p} = \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{q}{2}}$$

$$\frac{q^3}{p^3} = -\frac{8}{27}\frac{q}{2}$$

$$\frac{q^2}{p^3} = -\frac{4q}{27} \Rightarrow 27q^2 + 4p^3 = 0$$

Полученное выражение $27q^2 + 4p^3$ называется *дискриминантом* многочлена $x^3 + px + q$ и обозначается D_3 . Мы будем рассматривать D_3 как *функцию двух аргументов*. Изобразим участки положительности и отрицательности функции D_3 в координатах $(p; q)$ (Рис.1).

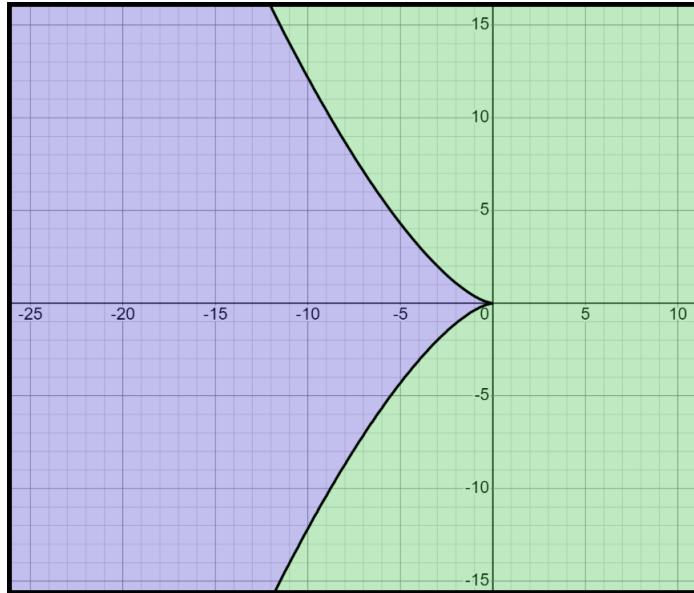


Рис. 1: Участки положительности и отрицательности функции D_3

Рассмотрим четыре точки, принадлежащие соответственно следующим областям: внутри получившегося графика (рис.1, синяя область), на самом графике, снаружи от него (рис.1, зелёная область) при $p < 0$ и снаружи при $p > 0$. Перечислим возможные случаи. Рассмотрим многочлен $x^3 + p_1x + q_1$.

- 1) Если точка $(p_1; q_1)$ лежит в синей области ($D_3 < 0$). График многочлена имеет 3 пересечения с горизонтальной осью.
- 2) Если точка $(p_1; q_1)$ лежит на графике График многочлена имеет 2 пересечения с горизонтальной осью. Многочлен данного графика отличается от 1-й формы только наличием кратных корней.
- 3) Если точка $(p_1; q_1)$ лежит в зелёной области ($D_3 > 0$) и $p_1 < 0$. График многочлена имеет 1 пересечение с горизонтальной осью.
- 4) Если точка $(p_1; q_1)$ лежит в зелёной области ($D_3 > 0$) и $p_1 > 0$ многочлен имеет 1 корень.

Графики в случаях 1), 2) и 3) относятся к форме 3.1 (одна вершина, одна яма), они отличаются количеством пересечений горизонтальной оси. Форма графика

в случае 4) представляет собой другую форму, без ям, то есть 3.2. Форма 3.1 реализуется при $p_1 < 0$, вторая – при $p_1 > 0$.

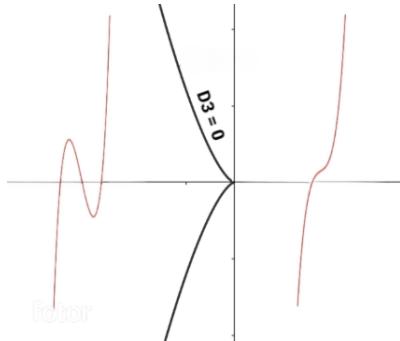


Рис. 2: Распределение форм графиков многочленов третьей степени

Найдём производную многочлена 3-й степени $f(x) = x^3 + p_1x + q_1$:

$$f'(x) = 3x^2 + p_1.$$

Приравняем к 0:

$$3x^2 + p_1 = 0.$$

Возможно три случая: имеет два решения при $p_1 < 0$, одно решение при $p_1 = 0$ и не имеет решений при $p_1 > 0$. Производная функции, чей график принадлежит форме 3.1, дважды обращается в ноль (это известно, так как у формы 3.1 есть локальные минимум и максимум), а производная функции, чей график принадлежит 3.2, в 0 не обращается. Отсюда следует, что график формы 3.1 получается в случаях 1), 2) и 3), а форма 3.2 – только в случае 4). Заметим, что у формы 3.2 существует только одно пересечение с любой горизонтальной прямой, так как функция монотонно возрастает на всей области допустимых значений.

4 Многочлены 4-й степени

Общий вид:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e, \text{ где } a \neq 0.$$

Преобразованиями, аналогичными преобразованиям многочлена общего вида 3-й степени, приведём многочлен к виду $x^4 + ax^2 + bx + c$. Так как от свободного члена форма графика не зависит, далее будет использоваться координатная плоскость $(a; b)$.

Определим формы графиков:

4.1.1 С двумя ямами. Левая яма глубже правой.

4.1.2 С двумя ямами. Правая яма глубже левой.

4.2.1 Одна яма с изгибом. Изгиб слева относительно ямы.

4.2.2 Одна яма с изгибом. Изгиб справа относительно ямы.

4.3.1 Одна яма, без изгибов. Расширяется быстрее вправо.

4.3.2 Одна яма, без изгибов. Расширяется быстрее влево.

Формы 4.1.1 и 4.1.2 (с двумя ямами) назовём *главными*. Формы 4.2.1 и 4.2.2 – *упрощёнными*. У графиков главных форм может быть два или четыре пересечения с горизонтальной осью (если рассматривать случаи, когда многочлен имеет кратные корни, то также существуют случаи и с одним или тремя пересечениями). А графики упрощённых форм имеют два пересечения (если многочлен имеет кратные корни, то может быть также одно пересечение).

Между главными и упрощёнными формами есть *граница* – форма графика с точкой перегиба, касательная к которой параллельна оси x . Заметим, что есть граница и между главными формами – график, в котором ямы имеют одинаковую глубину. А также существует граница между упрощёнными формами, образующимися при $a > 0$ (рис. 7).

Для начала изучим первые четыре формы. Эти графики, а также график, являющийся границей между ними, будут иметь 4 пересечения с осью x , два из которых соответственно совпадают с двумя оставшимися. Если же учитывать свободный член, то при различных его значениях главные графики могут иметь 1, 2, 3 или 4 пересечения с осью x , а график - граница - 2, 3 или 4 пересечения.

Рассмотрим подробнее границу между главными графиками.

Теорема 2. График многочлена x^4+ax^2+bx+c имеет две ямы с одинаковыми глубинами тогда и только тогда, когда коэффициент $b = 0$.

Доказательство. Разложим многочлен с двумя кратными корнями следующим

образом:

$$\begin{aligned}x^4 + ax^2 + bx + c &\equiv (x^2 + px + q)^2 = x^4 + 2x^3p + 2x^2q + p^2x^2 + 2pqx + q^2 = \\&= x^4 + 2px^3 + (2q + p^2)x^2 + 2pqx + q^2.\end{aligned}$$

Так как многочлены тождественны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую степень и коэффициенты при одноимённых степенях переменной в обоих многочленах равны, получим систему:

$$\begin{cases} 2p = 0 \\ 2q + p^2 = a \\ b = 2pq. \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения p и подставим в остальные, получим:

$$\begin{cases} p = 0 \\ q = \frac{a}{2} \\ b = 0. \end{cases}$$

Значит, при наличии кратных корней у многочлена 4-й степени коэффициент b обращается в 0. Также заметим, что при $b = 0$ многочлен становится чётным. ■

Для дальнейшего изучения форм графиков многочленов

$$f(x) = x^4 + ax^2 + bx$$

потребуется производная. Найдём её:

$$f'(x) = 4x^3 + 2ax + b.$$

В выражение $D_3 = 27q^2 + 4p^3 = 0$ вместо p подставим $\frac{a}{2}$, а вместо q подставим $\frac{b}{4}$. Эти значения мы получили, поделив выражение для производной на 4, чтобы свести его к приведённому виду.

Найдём зависимость между коэффициентами и формами графиков многочлена

$$f(x) = x^4 + ax^2 + bx.$$

Для этого докажем ряд несложных теорем.

Теорема 3. *Форма графика многочлена $x^4 + ax^2 + bx + c$ является главной тогда и только тогда, когда $27b^2 + 8a^3 < 0$.*

Доказательство. Уграфиков, чьи формы являются главными, три экстремума, следовательно, уравнение $f'(x) = x^3 + \frac{a}{2}x + \frac{b}{4} = 0$ должно иметь 3 решения. Как было определено в разделе 3 (см. стр. 7), чтобы многочлен вида $x^3 + px + q$ имел 3 решения, должно выполняться следующее условие:

$$27q^2 + 4p^3 < 0.$$

Тогда получим

$$27 \cdot \left(\frac{b}{4}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^3 = \frac{27b^2}{16} + \frac{a^3}{2} < 0 \iff 27b^2 + 8a^3 < 0. \blacksquare$$

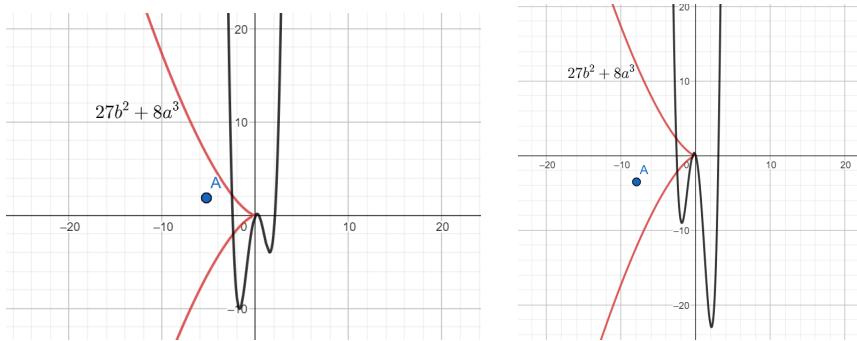


Рис. 3: Главные формы

Теорема 4. *Форма графика многочлена $x^4 + ax^2 + bx + c$ является упрощённой тогда и только тогда, когда $27b^2 + 8a^3 > 0$.*

Доказательство. У упрощённых форм один экстремум. Для выполнения данного условия нужно, чтобы уравнение $4x^3 + 2ax + b = 0$ имело одно решение. Тогда аналогично теореме 3 из данного условия получим выражение

$$27b^2 + 8a^3 > 0. \blacksquare$$

Добавим, что у упрощённых форм графиков возможно одно или два пересечения с абсциссой в зависимости от свободного члена.

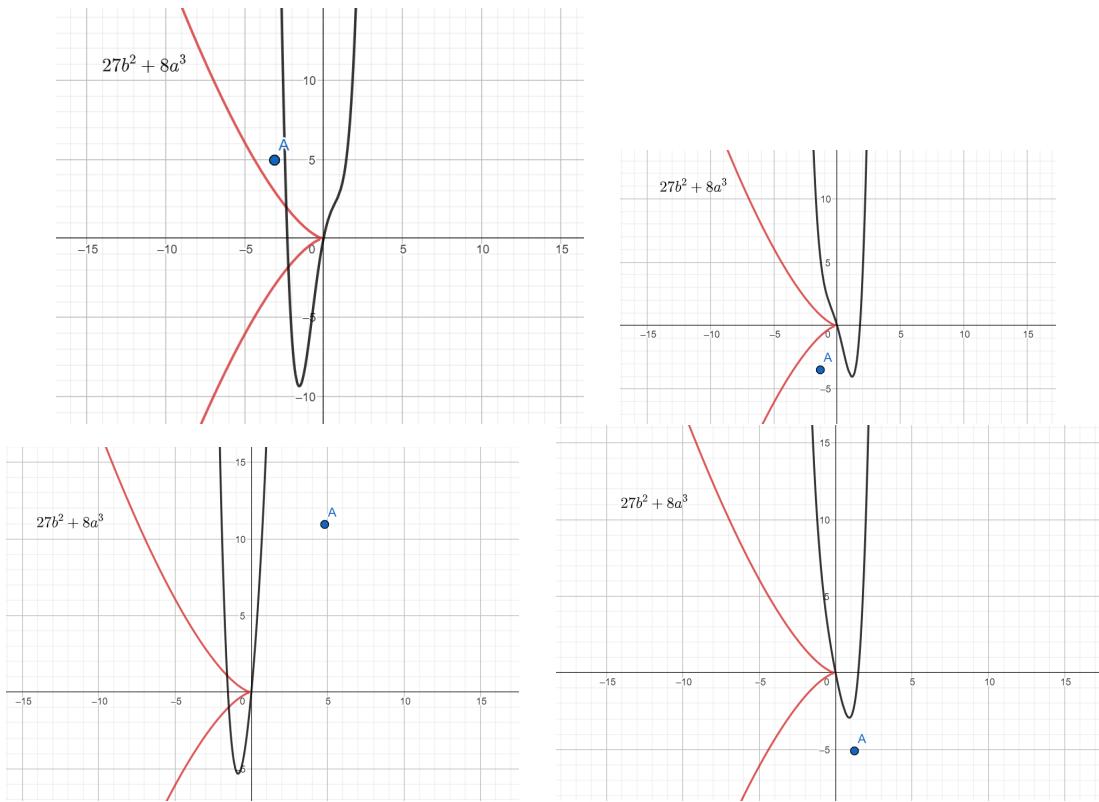


Рис. 4: Упрощённые формы

Также сформулируем условие, при которых образуются границы между главными и упрощёнными формами. Так как границы находятся между двумя формами, то и условие их появления тоже находится между, то есть граничащей формой между главными и упрощёнными является график многочлена, для которого верно равенство

$$27b^2 + 8a^3 = 0.$$

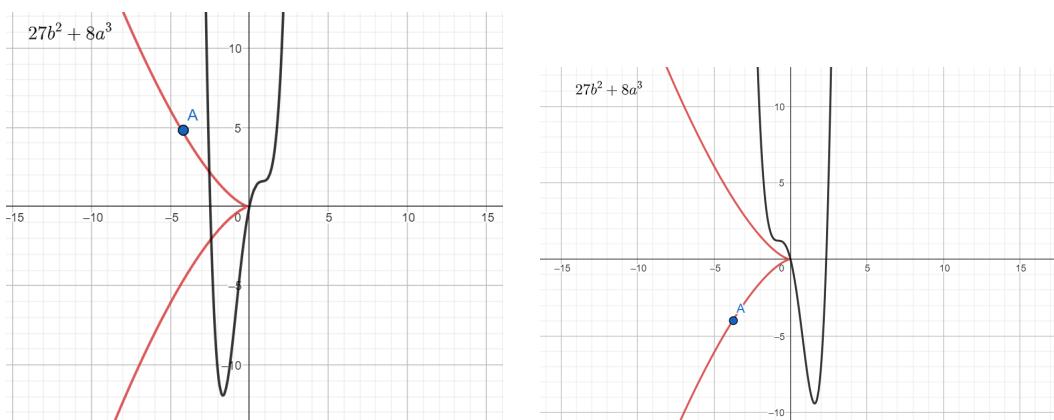


Рис. 5: Границы между главными и упрощёнными формами

Границей между двумя главными является график многочлена, у которого

$b = 0, a < 0$ (см. теорема 2).

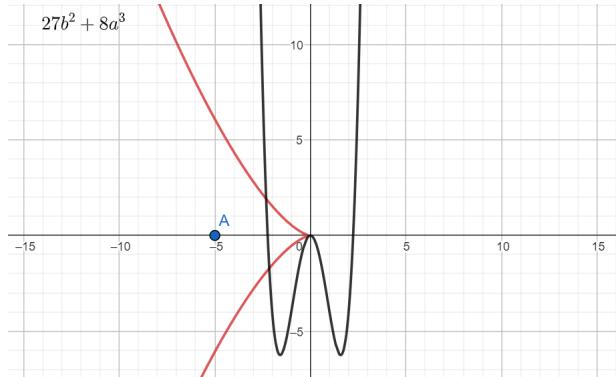


Рис. 6: Граница между главными формами

График-граница между упрощёнными ($a > 0$) аналогичен предыдущей границе (между главными формами) – две ямы сливаются. Поэтому условие появления этой формы графика получим из теоремы 2: данная граница образуется при условии $b = 0, a > 0$.

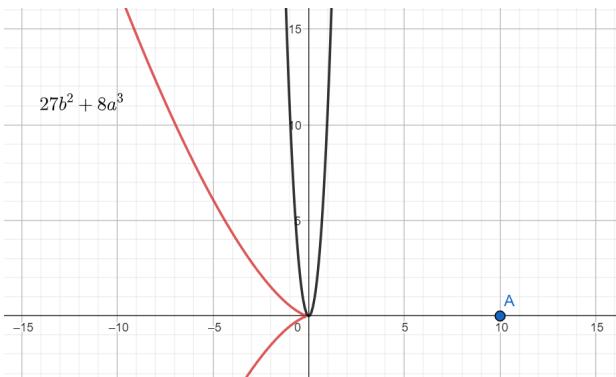


Рис. 7: Граница между упрощёнными

Граница между главными и упрощёнными определяется тем, что касательная к графику в точке перегиба горизонтальна.

Теорема 5. У форм графиков 4.1.1 - 4.2.2 отсутствуют точки перегиба.

Доказательство. Заметим, что точки $(a; b)$, определяющие формы графиков 4.1.1 - 4.2.2 и их границу, лежат в полуплоскости, которая задаётся неравенством $a < 0$. Чтобы убедиться, что в графиках, определяемые точкой $(a_1; b_1)$ при условии

$a_1 > 0$ нет перегибов, найдём вторую производную многочлена $f(x) = 4x^3 + 2a_1x + b_1$: $f''(x) = 12x^2 + 2a_1$. Так как $12x^2 \geq 0$ и $a_1 > 0$, то их сумма положи-

тельна. Значит, у данного вида графиков нет перегибов. ■

Перейдём к формам 4.3.1 и 4.3.2. Точки $(a_1; b_1)$ такие, что $a_1 > 0$. Аналогично графикам многочленов 2-й степени, графики форм 4.3.1 и 4.3.2 и график - граница могут пересекать абсциссу один или два раза. Различие форм заключается в коэффициенте b .

Экспериментальный факт. При $b > 0$ значение вершины по вертикальной оси отрицательно, и образуется форма 4.3.1. При $b < 0$ значение вершины по вертикальной оси данного графика положительно, а быстрее расширяется левая ветвь, образуется форма 4.3.2.

Граница между данными двумя формами – графики многочленов с $b = 0$, его вершина находится в точке $(0; 0)$, он симметричен относительно оси b .

Учитывая все полученные факты, изобразим распределение вышеперечисленных форм на плоскости $(a; b)$.

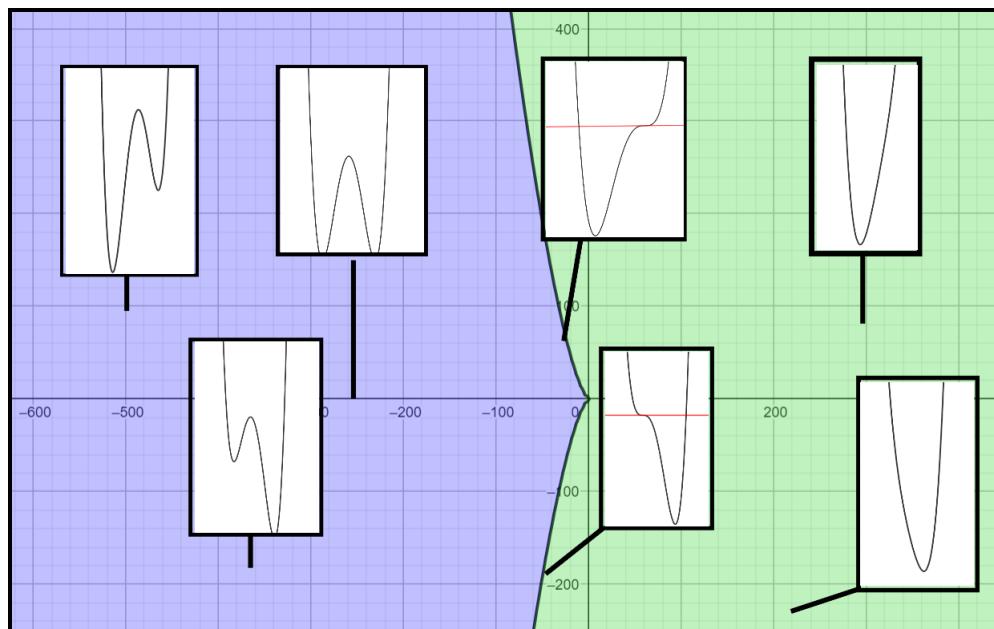


Рис. 8: Распределение форм графиков многочленов 4-й степени

5 Многочлены 5-й степени и их аналоги

5.1 Определение форм

В определении форм графиков многочленов 5-х степеней опустим рассмотрение пограничных форм, а также форм, чьи ямы переходят в перегибы. Найденное

количество форм (5) проверяется треугольником Эйлера-Бернулли (см. 7.2).

Введём правила обозначения форм графиков. Если обозначить вершины графика числами от 1 до k , где k - количество экстремумов, и расположить их в порядке возрастания высот соответствующих вершин и ям по вертикальной оси, то у разных форм будут разные комбинации. При такой классификации графики многочленов с кратными корнями или нулевыми коэффициентами считаются переходной стадией одного вида в другой и не выделяются в отдельную категорию. В графиках многочленов до 4-й степени включительно мы использовали более подробное разделение форм, так как это позволяет небольшое их количество. В настоящем разделе уже напрямую используются данные из треугольника Эйлера-Бернулли.

Крайнее число пятого ряда $m = 5$. Перечислим эти варианты. В рассматриваемых формах графиков многочленов 5-й степени присутствует две вершины и две ямы. Обозначим вершины графика слева направо номерами (1) и (3), а ямы - (2) и (4). Введём обозначение для графиков: график задаётся комбинацией цифр от 1 до 4, расположенными в том порядке, в каком находятся значения соответствующих экстремумов по вертикальной оси. Например, если ниже всего находится яма (2), далее идёт яма (4), а после вершины (1) и (3) соответственно, то такую форму будем называть 2413. Всего перестановок 4-х чисел $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Перечислим их:

$$1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432,$$

$$2134, 2143, 2314, 2341, 2413, 2431,$$

$$3124, 3142, 3214, 3241, 3412, 3421,$$

$$4123, 4132, 4213, 4231, 4312, 4321.$$

Очевидно, что не все комбинации возможны, так как, например, (1) не может быть ниже (2). Аналогично (3) никогда не будет находиться ниже (4) и (2). Поэтому уберём из полученных выше комбинаций те, в которых 1 в названии находится левее 2 или 3 находится левее 4, или 3 находится левее 2. Получим:

$$2143, 2413, 2431,$$

$$4213, 4231.$$

Все графики представлены (рис. 9) в вышеуказанном порядке слева направо и сверху вниз.

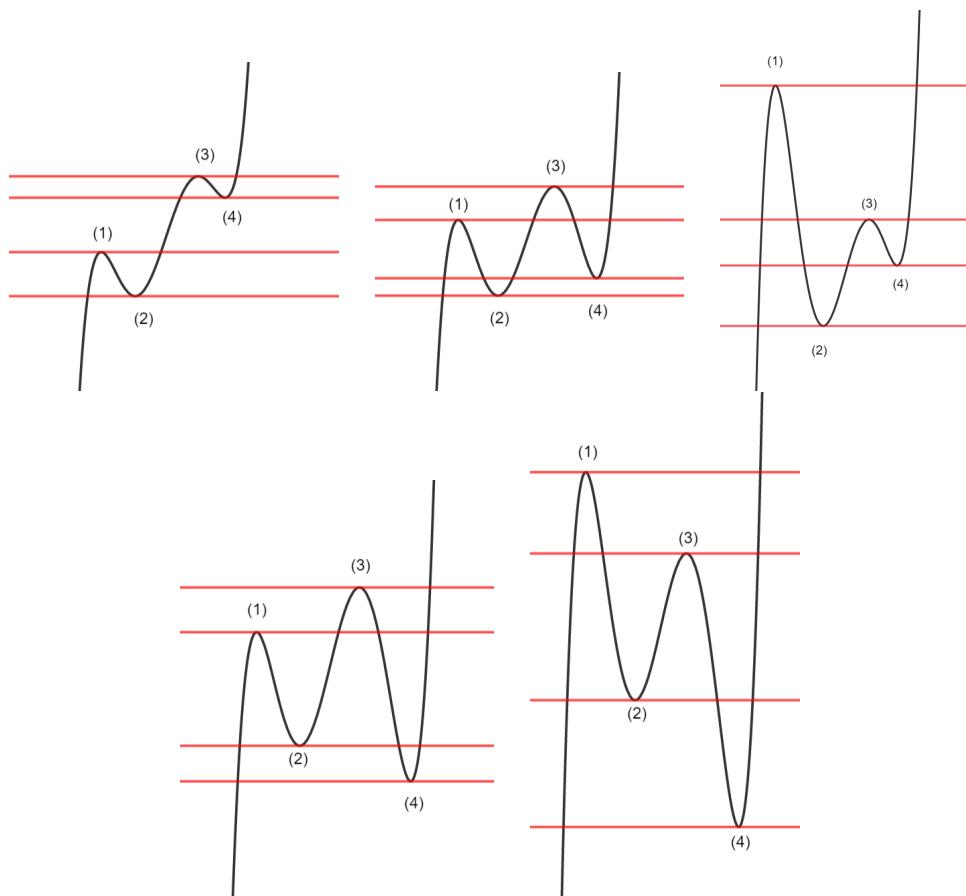


Рис. 9: Формы графиков 5-й степени

У графика формы 2143, в зависимости от значения свободного члена, может быть 1, 2 (в случае наличия кратных корней у многочлена) или 3 пересечения с горизонтальной прямой; у графиков остальных форм: 2413, 2431, 4213, 4231 - от 1 до 5 (2 и 4 в случае наличия кратных корней у многочлена) пересечений. Если не считать случаи, когда у многочлена, соответствующего одной из форм, есть кратные корни, то тогда возможно наличие 1, 3 или 5 корней.

Приведём примеры многочленов, формы графиков которых соответствуют выше-перечисленным:

Если $a = -3, 5, b = -0, 1, c = 4, 1$, то образуется график формы 2143.

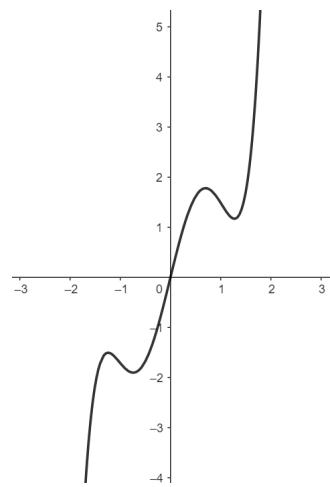


Рис. 10

Если $a = -3, 7, b = 0, 1, c = 3, 3$, то образуется график формы 2413.

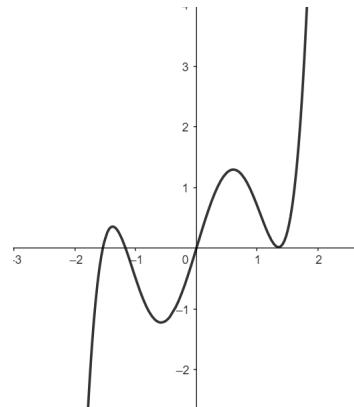


Рис. 11

Если $a = -3, 3, b = 1, c = 2$, то образуется график формы 2431.

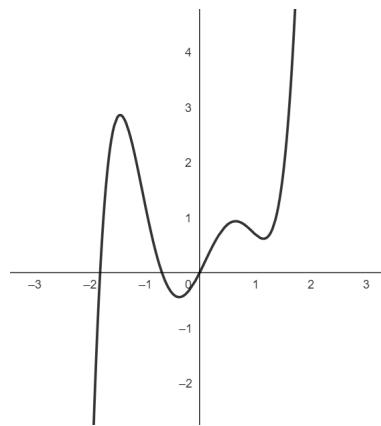


Рис. 12

Если $a = -3, 4, b = -0, 9, c = 2$, то образуется график формы 4213.

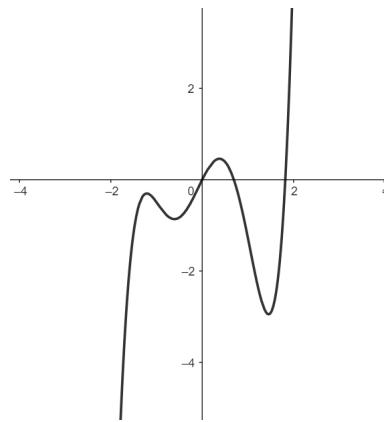


Рис. 13

Если $a = -4, 3, b = 0, 1, c = 2, 9$, то образуется график формы 4231

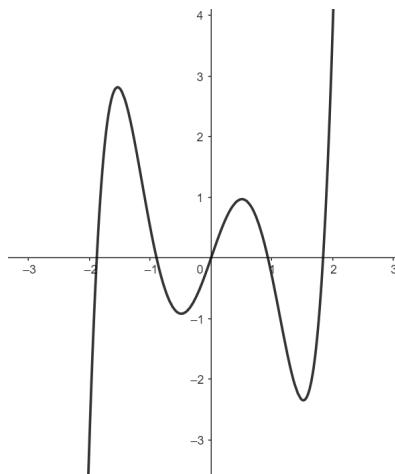


Рис. 14

5.2 Наблюдения

Представим многочлен пятой степени в виде $x^5 + ax^3 + bx^2 + cx$. Меняя значения коэффициентов и наблюдая за формой получаемого графика, получим следующие факты:

- 1) При уменьшении коэффициента a вершина (1) поднимается, становится острее, яма (4) опускается, становится острее.
- 2) При уменьшении коэффициента a вершина (1) и яма (4) поднимаются, скоро пропадают все вершины и ямы.

Расстояние между (2) и (3) не меняется.

- 3) При уменьшении коэффициента b пропадают (1) и (2), (3) и (4) становятся острее.

- 4) При увеличении коэффициента b пропадают (3) и (4), (1) и (2) становятся острее.
- 5) При уменьшении коэффициента c уменьшается расстояние между (2) и (3), все ямы и вершины становятся острее.
- 6) При $= 0$ вершины (2) и (3) совпадают и превращаются в перегиб.
- 7) При увеличении коэффициента c увеличивается расстояние между (2) и (3), постепенно пропадают вершины и ямы, но не так резко, как происходит при увеличении коэффициента b .

Также были обнаружены переходы одной формы графиков в другую.

- 1) При уменьшении a :

$$2143 \rightarrow 2413 \rightarrow 2431 \rightarrow 4231,$$

$$2143 \rightarrow 2413 \rightarrow 4213 \rightarrow 4231.$$

В процессе нескольких опытов было замечено, что при различных коэффициентах b и c в цепочке переходов не могут одновременно встретиться формы 2431 и 4231, которые, являются противоположностями друг друга. Это связано с тем, что расстояние от 1 до 2 растёт медленнее, чем от 3 до 4 при уменьшении a , поэтому будет ли в цепочке переходов вид 4213 или 2431 определяют коэффициенты b и c .

- 2) При уменьшении b :

$$2431 \rightarrow 2413 \rightarrow 4213,$$

$$2431 \rightarrow 4231 \rightarrow 4213,$$

$$2143 \rightarrow 2413 \rightarrow 4213.$$

- 3) При уменьшении c :

$$2143 \rightarrow 2413 \rightarrow 4213 \rightarrow 4231,$$

$$2143 \rightarrow 2413 \rightarrow 2431 \rightarrow 4231.$$

Данные цепочки получены экспериментальным путём, других не найдено. Из полученных данных найдём граничащие между собой формы графиков:

2143 граничит только с 2413,

2413 граничит с 2143, 2431, 4213,

2431 граничит с 2413 и 4231,

4213 граничит с 2413, 4231,

4231 граничит с 2431, 4213.

Представим полученную информацию в виде графа:

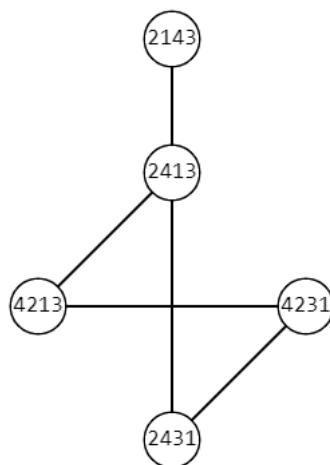


Рис. 15

5.3 Модули. Аналоги графиков 5-й степени

Рассмотрим аналоги графиков 5-й степени, представленные с помощью модулей.

Экспериментальный факт. *Общий вид функций аналогов форм 5-х степеней.* $f(x) = x + |x + a| - |x + b| + |x + c| - |x + d|$.

При определённых условиях график приобретает форму, похожую на графики многочленов 5-й степени (две вершины, две ямы).

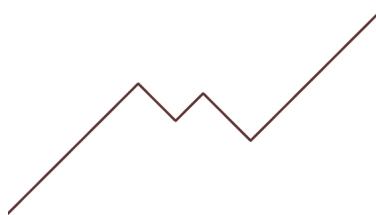


Рис. 16

Сначала разберём функцию проще.

$$g(x) = x + |x + a| - |x + b|.$$

Критические точки, точки изломов по оси абсцисс, имеют значения $-a$ и $-b$.

1) Если $a > b$ (рис. 17, в данном случае $a = 5, b = 2$), то при $x < -a$ функция возрастает:

$$g(x) = x - x - a + x + b = x - a + b.$$

Далее идёт участок функции, в котором выполняется условие $-a \leq x \leq -b$, тогда функция возрастает, образуется склон:

$$g(x) = x + x + a + x - b = 3x + a - b.$$

При $x > -b$ функция возрастает:

$$g(x) = x + x + a - x + b = x + a + b.$$

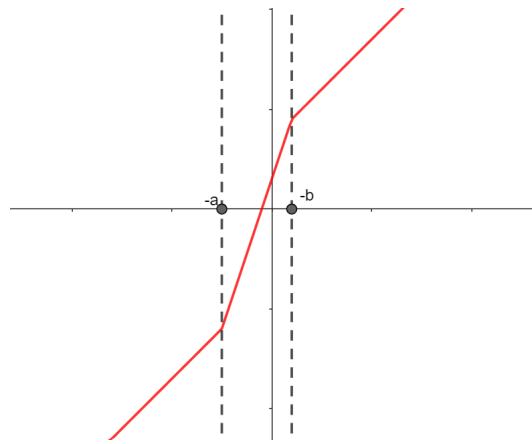


Рис. 17

2) Если $a < b$ (рис. 18, в данном случае $a = 10, b = 3$), то при $x < -b$, функция возрастает:

$$g(x) = x - x - a + x + b = x - a + b.$$

При $-b < x < -a$ функция убывает, образуется вершина. :

$$g(x) = x - x - a - x - b = -x - a - b.$$

При $-a \leq x$, функция возрастает, образуется яма:

$$g(x) = x + x + a - x - b = x + a - b.$$

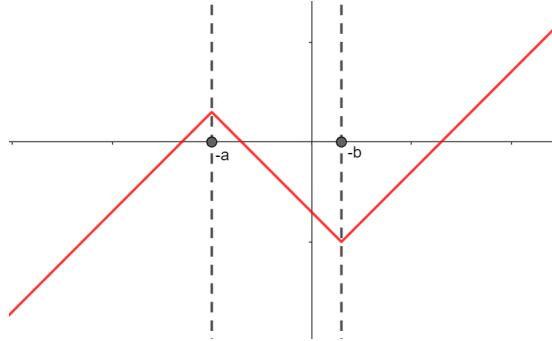


Рис. 18

Перейдём к функции $f(x)$. Аналогичными рассуждениями придём к тому, что чтобы график $f(x)$ имел нужную нам форму, нужно чтобы наибольшее значение принимал b или d , причём если b принимает наибольшее, то d должен принимать третье по возрастанию значение. Тогда возможны следующие комбинации (буквы расставлены по возрастанию значений соответствующих коэффициентов): $abcd, cbad, adcb, cdab$.

Обозначим вершины и ямы так же, как это делали для графиков многочленов 5-й степени. Перечислим формы (рис.19), справа налево, сверху вниз: 2143, 2413, 2431, 4213, 4231.

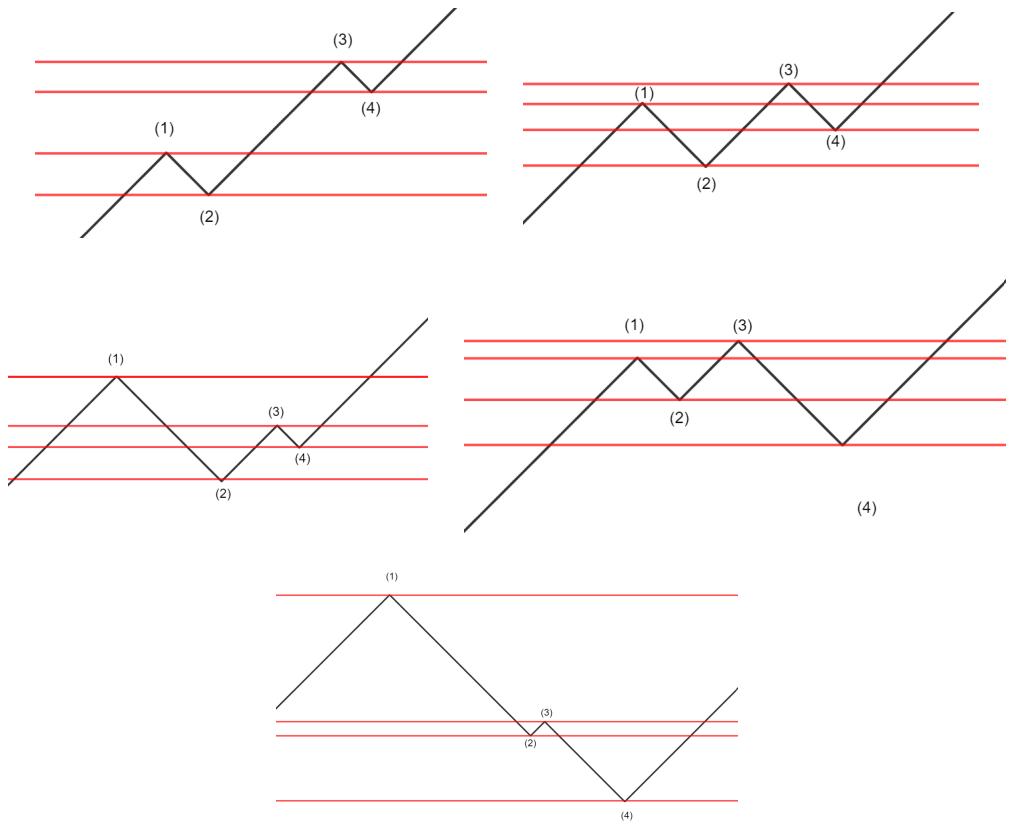


Рис. 19: Аналоги графиков 5-й степени с модулями

Каждая из этих форм реализуется бесконечным количеством функций вида

$$f(x) = x + |x + a| - |x + b| + |x + c| - |x + d|.$$

Приведём примеры:

1) Если $a = 15, b = 20, c = -9, d = -7$, образуется форма 2143.

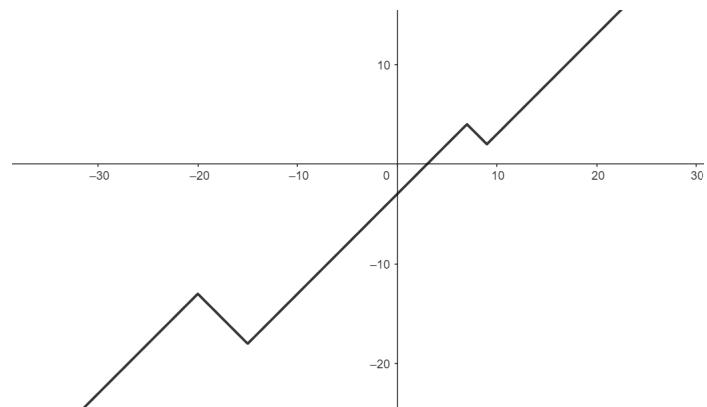


Рис. 20

2) Если $a = 5, b = 17, c = -15, d = -9$, образуется форма 2413.

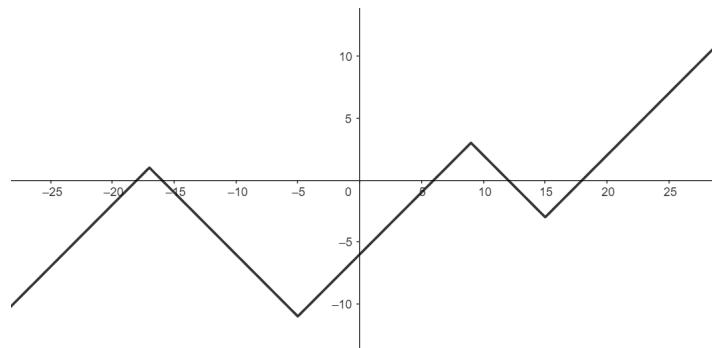


Рис. 21

3) Если $a = 4, b = 20, c = -12, d = -7$, образуется форма 2431.

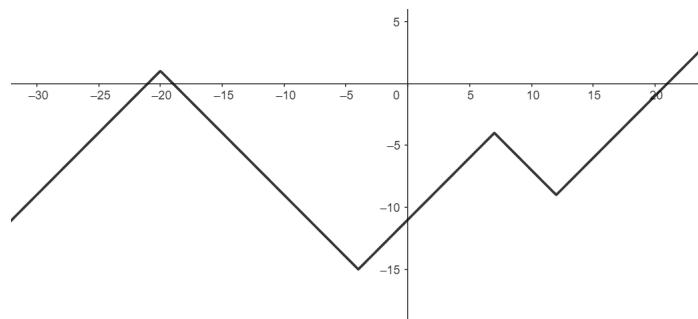


Рис. 22

4) Если $a = 6, b = 9, c = -18, d = -4$, образуется форма 4213.

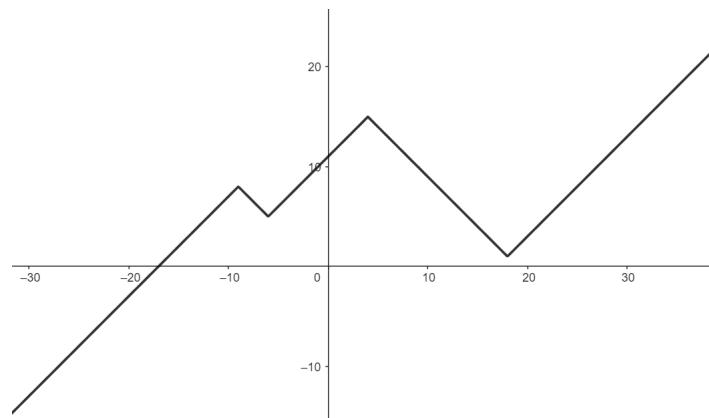


Рис. 23

5) Если $a = -3, b = 12, c = -12, d = -6$, образуется форма 4231.

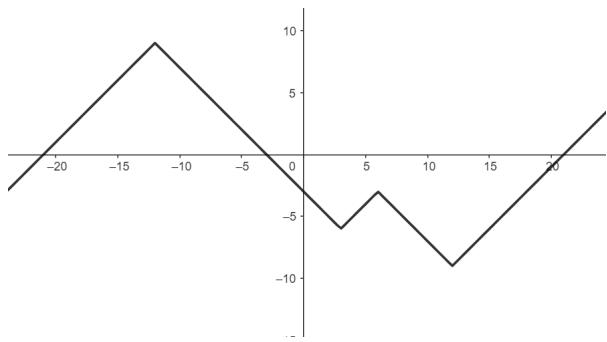


Рис. 24

Заметим, что если мы из каждого коэффициента вычтем одно и то же число, то получим график той же формы, но он будет смещён по диагонали вдоль прямой, являющейся частью графика при $x < x_1$, где x_1 – значение абсциссы вершины (1) (см. рис. 25), чёрным цветом помечен изначальный график, красным – график после вычитания из каждого коэффициента одного и того же числа).

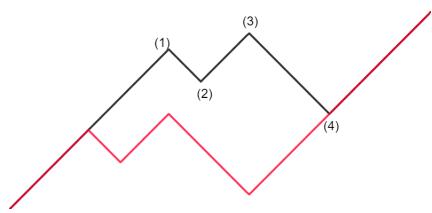


Рис. 25

6 Заключение

В процессе моего исследования мне удалось стратифицировать многочлены 3-й, 4-й и 5-й степеней, перечислив формы графиков данных степеней и найдя их зависимость от коэффициентов, а также рассмотреть аналоги графиков 5-й степени, полученных с использованием модулей. Гипотеза доказана для графиков вышеуказанных функций с фиксированным количеством участков возрастания и убывания, так как удалось найти условия, при которых образуется каждая из форм, соответствующие многочлены предъявлены (см. рис 3 - 7, рис. 10 - 14, рис. 20 - 24).

Перспективами данного исследования являются:

- 1) рассмотрение форм графиков 6-й степени (16 форм);
- 2) строгое обоснование наблюдений, представленных в настоящей работе;
- 3) изучение графиков степеней выше 6, а также введение для них новых условных обозначений;
- 4) рассмотрение многочленов с комплексными коэффициентами.

Количество путей будущего развития исследования большое, а полученные данные позволяют перейти к более сложным областям этой темы.

7 Приложение

7.1 Формула Кардано

Приведём без доказательств:

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Данная формула определена над полем вещественных чисел при условии

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \geq 0 \Leftrightarrow 4p^3 + 27q^2.$$

7.2 Треугольник Эйлера-Бернулли

«Алгоритм вычисления треугольника Эйлера-Бернулли состоит в следующем: каждое число в треугольнике равно сумме чисел предшествующего ряда, расположенных левее, если данный горизонтальный ряд состоит из чётного числа элементов, и правее - если из нечётного.» [3, с. 7]. Например, посчитаем элементы седьмого ряда. Так как номер ряда нечётный, то будем считать элементы слева направо: левее самого левого элемента в шестом ряду ничего нет, поэтому он равен 0. Обозначим a_{xy} элемент y ряда x . Порядковый номер y считаем слева, при нечётном x и считаем справа при чётном x . Тогда $a_{71} = 0$. Левее второго элемента a_{72} только 16, поэтому $a_{72} = 16$; левее a_{73} в 6 ряду находится 16 и 16, поэтому $a_{73} = 16 + 16$; аналогично $a_{74} = 16 + 16 + 14 = 46$, $a_{75} = 16 + 16 + 14 + 10 = 56$, $a_{76} = 16 + 16 + 14 + 10 + 5 = 61$, $a_{77} = 16 + 16 + 14 + 10 + 5 + 0 = 61$.

Посчитаем количество форм графиков для 8-й степени:

$$a_{82} = 61, a_{83} = 61 + 61 = 122, a_{84} = 61 + 61 + 56 = 178, a_{85} = 61 + 61 + 56 + 46 = 224, a_{86} = 61 + 61 + 56 + 46 + 32 = 256, a_{87} = a_{88} = 61 + 61 + 56 + 46 + 32 + 16 + 0 = 272.$$

Для 9-й степени: $a_{91} = 0, a_{92} = 272, a_{93} = 272 + 272 = 544, a_{94} = 544 + 256 = 800, a_{95} = 800 + 224 = 1024, a_{96} = 1024 + 178 = 1202, a_{97} = 1202 + 122 = 1324, a_{98} = a_{99} = 1324 + 61 = 1385$.

Для подсчёта количества форм 10-й степени не будем рассчитывать каждое число 10-го ряда, так как они требуются для расчёта последующих рядов. Посчитаем количество форм: $a_{1010} = 0 + 272 + 544 + 800 + 1024 + 1202 + 1324 + 1385 + 1385 = 7936$.

Крайнее число t строки n указывают на количество форм графиков с $n - 1$ количеством экстремумов.

Теорема 6. [3] Крайнее левое число в $(2k + 1)$ -й строке равно количеству форм графиков многочленов степени $2k + 1$, а крайнее правое число $(2k)$ -й строки равно количеству форм графиков многочленов степени $2k$.

Рис. 26: Треугольник Эйлера-Бернулли до 15 ряда включительно

Разложим сумму тангенса и секанса в ряд Тейлора [3, с.4]: $\operatorname{tg}(x) + \sec(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{61}{720}x^6 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{277}{8064}x^8 + \frac{62}{2835}x^9 + \frac{50521}{3628800}x^{10} + \dots$

Умножим коэффициент при x n -й степени на $n!$:

$$1 \cdot 1! = 1, \frac{1}{2} \cdot 2! = 1, \frac{1}{3} \cdot 3! = 2, \frac{5}{24} \cdot 4! = 5, \frac{2}{15} \cdot 5! = 16, \frac{61}{720} \cdot 6! = 61, \frac{17}{315} \cdot 7! = 272, \\ \frac{277}{8064} \cdot 8! = 1385, \frac{62}{2835} \cdot 9! = 7936, \frac{50521}{3628800} \cdot 10! = 50521, \dots$$

Заметим, что произведением коэффициента при x n -й степени в разложении $\operatorname{tg}(x) + \sec(x)$ в ряд Тейлора и $n!$ является количество форм графиков многочленов $(n - 1)$ -й степени.

Список литературы

1. Прасолов В.В. История математики. Часть 1. г. М., 2018.
2. Гиндикин С.Г. Рассказы о физиках и математиках. — 3-е изд., расширенное. М., 2001.
3. Арнольд В. И. Исчисление змей и комбинаторика чисел Бернулли, Эйлера и Спрингера групп Кокстера // Успехи математических наук. 1992. №283. С. 3-45.