Национальный исследовательский университет

"Высшая школа экономики"

Лицей

Исследовательская работа

Изогональное сопряжение и равнобокие гиперболы

Выполнил

Векшин Максим Дмитриевич

Научный руководитель

Кухарчук Иван Андреевич

Содержание

1 Цели и задачи исследования

Цель работы:

Изучение и применение изогонального сопряжения и равнобоких гипербол в задачах по геометрии

Задачи исследования:

1. Исследовать свойства изогонального сопряжения

2. Исследовать строение равнобоких гипербол

3. Исследовать связь изогонального сопряжения и конических сечений, в частности, равнобоких гипербол

4. Применить полученные знания об изогональном сопряжении при доказательстве различных теорем и решении задач

Материал исследования:

1. Проективная геометрия

2. Изогональное сопряжение

3. Конические сечения, равнобокие гиперболы

Методы исследования:

1. Метод трилинейных координат в геометрии

2. Изогональное сопряжение относительно треугольника

3. Подсчёт углов между прямыми

4. Теорема Паскаля для доказательства принадлежности точек одной конике

2 Теоретическая часть

Рассмотрим определения и методы исследования, на которых будут основаны доказательства теорем и решения задач.

Определение 2.1. Вещественная проективная плоскость — вещественная плоскость дополненная прямой, называемой бесконечно удаленной. На бесконечно удалённой прямой пересекаются пучки параллельных прямых вещественной плоскости. Точка их пересечения называется бесконечно удалённой. (По Сосинский А.Б. Геометрии: МЦНМО, 2017 // Проективная плоскость как геометрия С. 164-167)

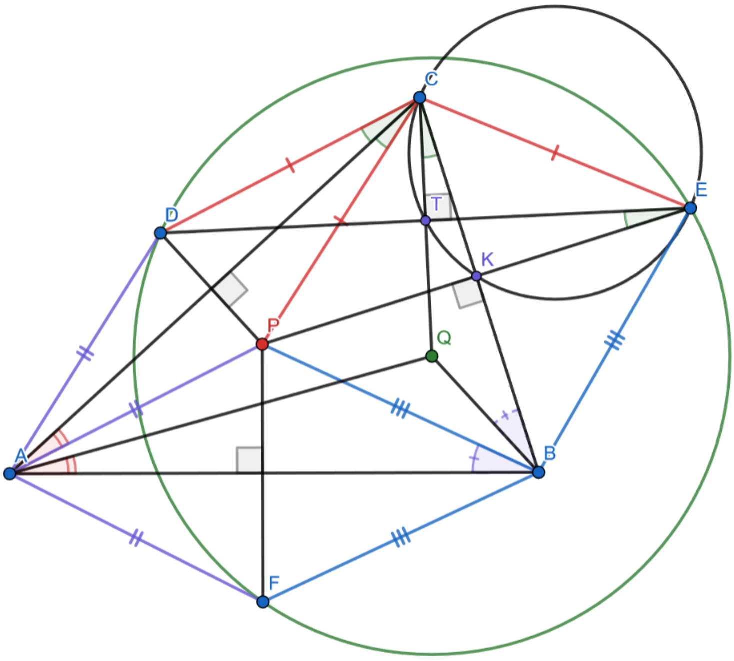
2.1 Изогональное сопряжение

Определение 2.2. Точки P и Q называются изогонально сопряжёнными в треугольнике ABC, если прямые AP и AQ симметричны относительно биссектрисы угла A, прямые BP и BQ симметричны относительно биссектрисы угла B, прямые CP и CQ симметричны относительно биссектрисы угла C.

Изогональное сопряжение — преобразование, ставящее точке в соответствие изогонально сопряжённую ей точку (или множество точек). На всей плоскости за исключением прямых, содержащих стороны треугольника, изогональное сопряжение взаимно однозначно.

Определение 2.3. Пусть A_1, B_1, C_1 — основания перпендикуляров из точки P на стороны BC, AC, AB треугольника ABC. Тогда треугольник $A_1B_1C_1$ называется педальным треугольником точки P относительно треугольника ABC.

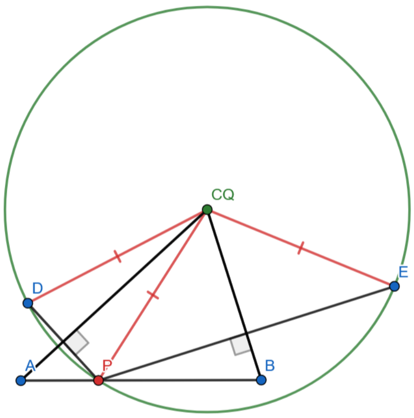
Доказательство корректности определения 2.2:



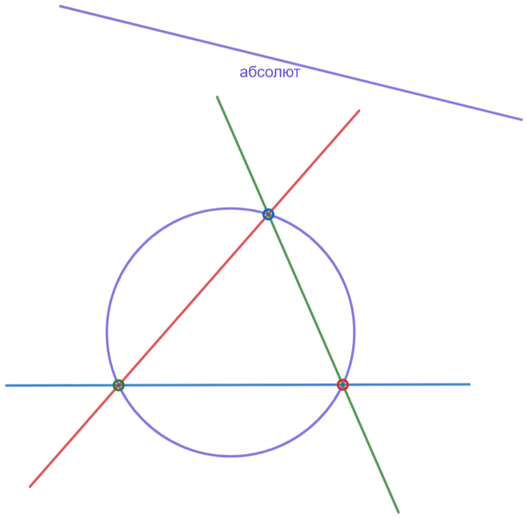
Пусть точка Q такова, что прямые CP и CQ симметричны относительно биссектрисы угла C и прямые AP и AQ симметричны относительно биссектрисы угла A. Докажем, что прямые BP и BQ симметричны относительно биссектрисы угла B. Пусть точки D и E симметричны P относительно сторон AC и CB. Тогда $CP = CD = CE$, следовательно треугольник DCP равнобедренный, значит $\angle PCA = \angle DCA$ и C — центр окружности описанной около треугольника DPE, значит $\angle DEP = \frac{1}{2}\angle DCP = \angle QCB$. Откуда следует, что $CTKE$ вписан, значит $\angle CTE = 90°$. То есть CT это высота в равнобедренном треугольнике DCE, значит CQ является серединным перпендикуляром к отрезку DE. Аналогично AQ является серединным перпендикуляром к DF. Это равносильно тому, что Q — центр описанной окружности DFE, значит BQ — серединный перпендикуляр к EF, откуда следует равенство $\angle ABP$ и $\angle CBQ$.

Из решения следует такая интерпретация изогонального сопряжения: точке P ставится в соответствие точка Q — центр описанной окружности её удвоенного педального треугольника. Так как для точек P на описанной окружности треугольника ABC удвоенный педальный треугольник вырождается в прямую Штейнера, то точка Q не определена на конечной части вещественной плоскости. Но исходя из новой интерпретации можно логично определить точку Q как бесконечно удалённую точку, соответствующую направлению, перпендикулярному направлению прямой Штейнера точки P. Также понятно, что точкам P на стороне треугольника ABC будет соответствовать вершина треугольника ABC, противоположная стороне, на которой находится P. Значит изогональное сопряжение для точек на сторонах треугольника **не** является биективным.

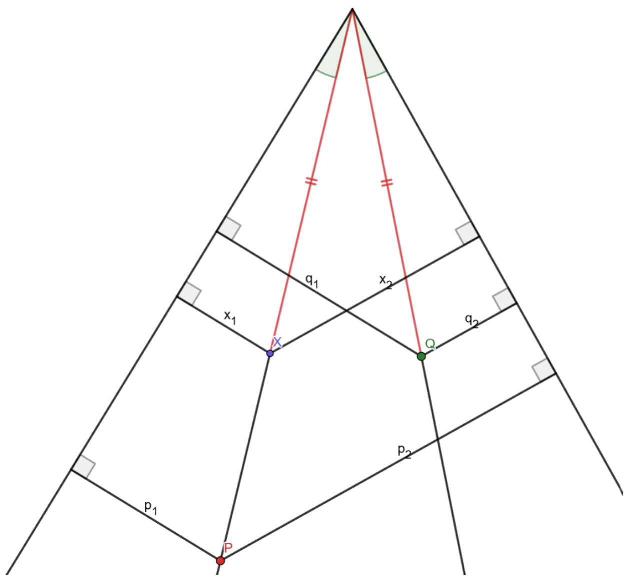
1: Случай "C совпадает с Q"



2: Соответственные области при изогональном сопряжении



Лемма 1. *Точки P и Q лежат на прямых, симметричных относительно биссектрисы угла и проходящих через его вершину (далее "на изогоналях"), то* $\frac{p_1}{p_2} = \frac{q_2}{q_1}$



Доказательсво:

Существует гомотетия в вершине угла, переводящая точку P в точку X такую, что X и Q равноудалены от вершины угла, поэтому $\frac{x_1}{x_2} = \frac{p_1}{p_2}$. А $\frac{x_1}{x_2} = \frac{q_2}{q_1}$ в силу симметрии относительно биссектисы угла. Откуда следует, что $\frac{p_1}{p_2} = \frac{q_2}{q_1}$.

Применив лемму для любых двух углов треугольника, в котором P и Q являются изогонально сопряженными, получим, что $p_1 : p_2 : p_3 = \frac{1}{q_1} : \frac{1}{q_2} : \frac{1}{q_3}$. Где x_i — направленное расстояние от точки X до $i-$той (i $=$ 1; 2; 3) стороны треугольника.

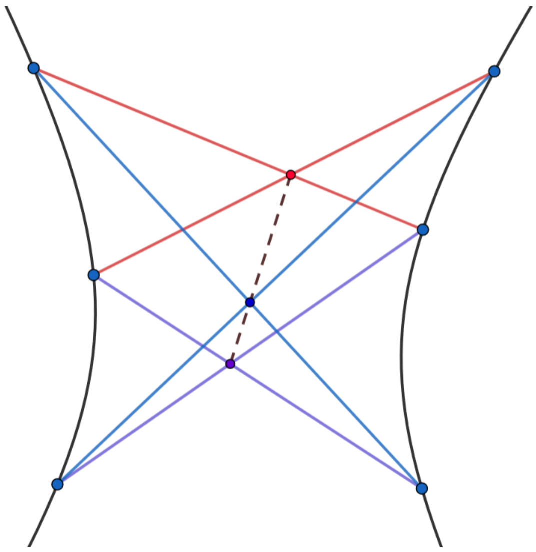
2.2 Теорема Паскаля

Определение 2.4. Проективное преобразование — преобразование вещественной проективной плоскости, при котором образом любой прямой является прямая.

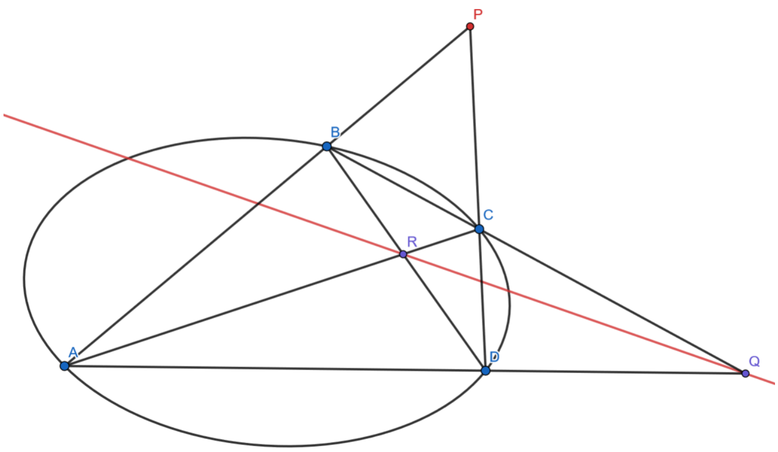
Определение 2.5. Коника — кривая на вещественной проективной плоскости, являющаяся образом окружности при проективном преобразовании, вследствие чего является кривой второго порядка. (По Сосинский А.Б. Геометрии: МЦНМО, 2017 // Коники на проективной плоскости С. 172-173)

Теорема 1. ***Теорема Паскаля.*** *Если шестиугольник вписан в конику, то точки пересечения его противоположных сторон лежат на одной прямой.*

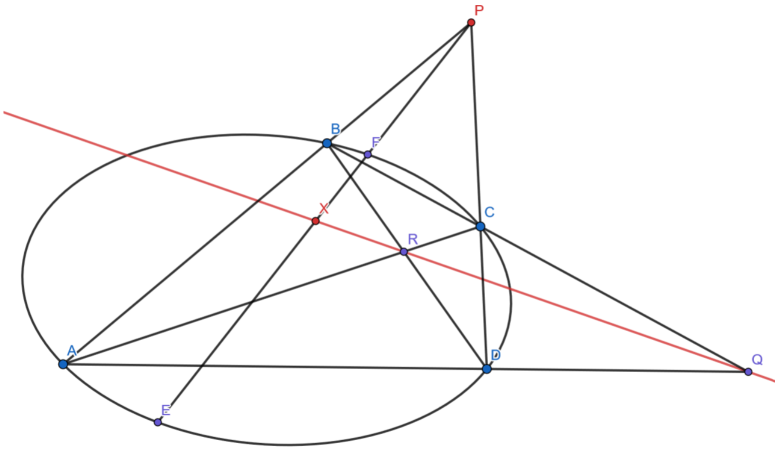
Теорема 2. ***Обратная теорема Паскаля.*** *Если точки пересечения противоположных сторон шестиугольника лежат на одной прямой, то его вершины лежат на одной конике.*



2.3 Поляра относительно коники



Определение 2.6. Две прямые пересекаются в точке P и пересекают конику α в точках A, B и C, D. Прямые AD и BC пересекаются в точке Q. Прямые AC и BD пересекаются в точке R. Тогда прямая QR называется полярой точки P относительно коники α.



Теорема 3. ***Гармоническое свойство поляр.*** *Прямая проходит через точку P и пересекает конику α в точках E и F. Поляра точки P пересекает прямую EF точке X, тогда* $[E, F, P, X] = -1$

2.4 Трилинейная система координат

Трилинейные координаты $(x : y : z)$ точки относительно данного треугольника описывают относительные направленные расстояния от точки до трех сторон треугольника. Трилинейные координаты являются примером однородных координат.

Уравнение прямой в трилинейных координатах:

$ax + by + cz = 0$

Коника задаётся уравнением вида:

$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz = 0$

Изогональное сопряжение задаётся формулой (по лемме 1):

$(x : y : z) \to (\frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z})$

3 Практическая часть

3.1 Изогональное сопряжение

Теорема 4. *При изогональном сопряжении прямая переходит в описанную конику (то есть конику, проходящую через все вершины треугольника).*

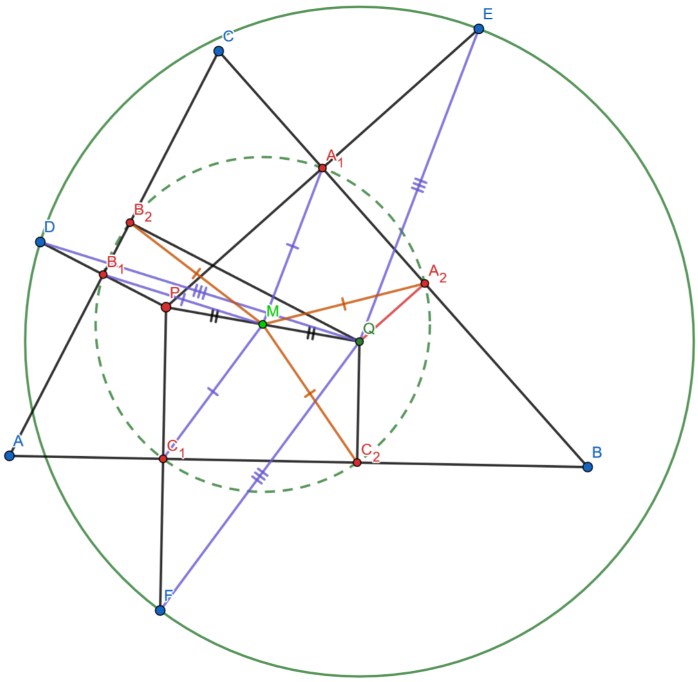
Доказательво:

Пусть прямая l в трилинейных координатах имеет вид $ax + by + cz = 0$, применим к каждой точке на прямой l изогональное сопряжение, тогда её уравнение будет иметь вид: $a\frac{1}{x} + b\frac{1}{y} + c\frac{1}{z} = 0$. Домножив его на xyz, получим: $ayz + bxz + cxy = 0$ — что является частным случаем уравнения коники. А так как прямая l пересекает все стороны треугольника (возможно в бесконечно удалённых точках), а после изогонального сопряжения точки на сторонах переходят в противоположные им вершины — то образ прямой l пройдет через все вершины треугольника (то есть коника является описанной).

Определение 3.1. Пусть A_1, B_1, C_1 — основания перпендикуляров из точки P на стороны BC, AC, AB треугольника ABC. Тогда описанная окружность треугольника $A_1B_1C_1$ называется педальной окружностью точки P относительно треугольника ABC.

Теорема 5. *Педальные окружности изогонально сопряженных точек совпадают.*

Доказательво:



Пусть M - середина отрезка PQ. Сделаем гомотетию с центром в точке P и коэффициентом $\frac{1}{2}$. Как было доказано ранее точка Q — центр описанной окружности удвоенного педального треугольника точки P, то есть $QD = QE = QF$. Значит после гомотетии $MB_1 = MA_1 = MC_1$. Докажем, что $MB_1 = MB_2$: пусть K — середина отрезка B_1B_2, тогда MK — средняя линия прямоугольной трапеции PB_1B_2Q, следовательно MK перпендикулярна стороне B_1B_2 трапеции, значит MK — серединный перпендикуляр к отрезку B_1B_2, то есть $MB_1 = MB_2$. Аналогично получим равенства $MA_1 = MA_2$ и $MC_1 = MC_2$. Выходит, что M равноудалена от всех оснований перпендикуляров из P и Q, а значит они лежат на одной окружности с центром в точке M.

Следствие 5.1. *Сделав гомотетии с центрами в точках P и Q и коэффициентом 2, получим, что радиусы удвоенных педальных окружностей точек P и Q равны и в 2 раза больше радиуса общей педальной оркужности.*

3.2 Равнобокая гипербола

Определение 3.2. Гипербола — коника, пересекающая бесконечно удалённую прямую в двух различных точках. Асимптотами гиперболы называются прямые, касающиеся гиперболы в точке, являющейся бесконечно удалённой. Гипербола называется равнобокой (или равносторонней), если её асимптоты перпендикулярны.

Теорема 6. *Если равнобокая гипербола описана около треугольника ABC, то его ортоцентр H лежит на этой равнобокой гиперболе.*

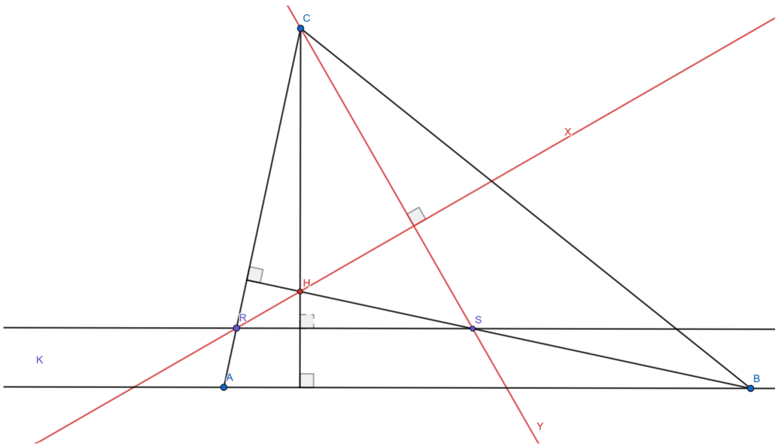
Обратная теорема. *Если описанная около трегольника коника проходит через его ортоцентр, то это равнобокая гипербола.*

Доказательство:

В одну сторону:

Применим обратную теорему Паскаля для шестиугольника $CABHXY$, где X и Y бесконечно удалённые точки гиперболы.

Пусть $CA \cap XH = R$; $AB \cap XY = \infty_{AB}$; $BH \cap CY = S$



Тогда требуется доказать, что R, S и ∞_{AB} лежат на одной прямой, то есть RS параллельно AB. Точка H — ортоцентр ABC, значит прямая SH перпендикулярна AC. Прямые CY и HX перпендикулярны, так как гипербола равнобокая (то есть направления на её бесконечно удалённые точки перпендикулярны), следовательно H — ортоцентр RSC, значит CH перпендикулярна RS, из чего следует параллельность RS и AB.

В другую сторону:

Заметим, что если коника проходит через четвёрку точек, не образующую выпуклый четырёхугольник — то она обязательно является гиперболой, а значит имеет две бесокнечно удалённые точки. Далее применяем прямую теорему Паскаля для многоугольника $CABHXY$ и доказательство выше в обратную сторону.

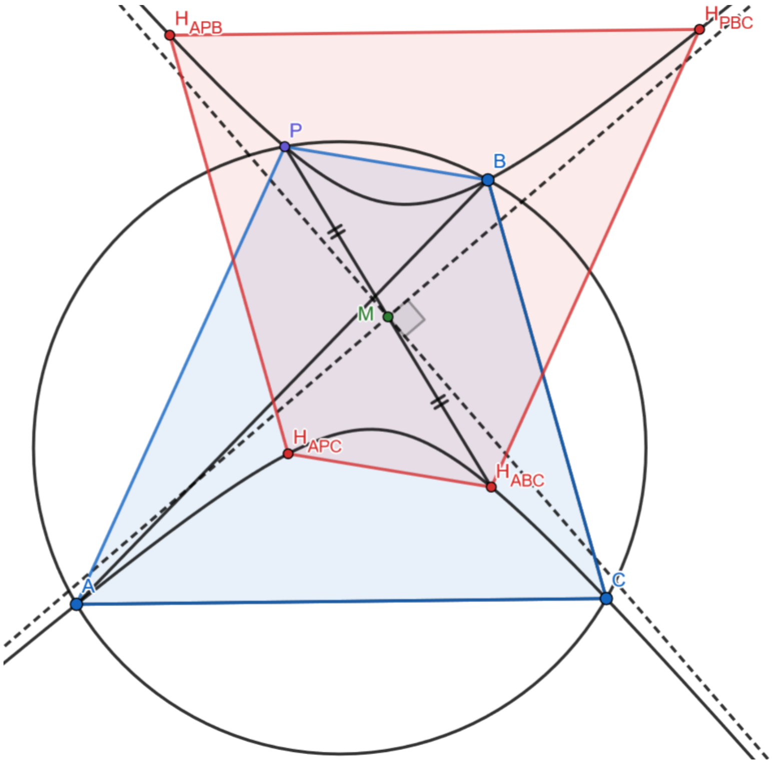
3.3 Центр гиперболы

Определение 3.3. Центром гиперболы будем называть её центр симметрии.

Теорема 7. *Равнобокая гипербола, описанная около треугольника ABC с ортоцентром H_{ABC}, пересекает его описанную окружность в точке P. Тогда середина отрезка PH — центр гиперболы.*

Доказательство:

Так как $\angle AH_{ABC}C = 180° - \angle ABC$, то точка H_{ABC} лежит на окружности, симметричной описанной окружности треугольника ABC относительно AC. Такая окружность совмещается с описанной окружность (ABC) с помощью параллельного переноса на фиксированный вектор, перпендикулярный AC. При таком параллельном переносе точка H_{ABC} перейдёт в точку B. Аналогично точка H_{APC} перейдет в точку P. Следовательно $BPH_{APC}H_{ABC}$ — параллелограмм. Аналогично $BCH_{APC}H_{APB}$ и $APH_{PBC}H_{ABC}$ тоже параллелограммы. Рассмотри центральную симметрию, меняющую точки P и H_{APB} местами, её центр это точка M. Так как $BPH_{APC}H_{ABC}$ параллелорамм, то эта симметрия поменяет местами



B и H_{APC} (точка пересечения диагоналей параллелограмма M делит диагонали пополам). Так как $BCH_{APC}H_{APB}$ параллелограмм, то эта же симметрия меняет местами C и H_{APB}. Рассматривая параллелограмм $APH_{PBC}H_{ABC}$, получим, что симметрия меняет местами A и H_{PBC}. Следовательно четырёхугольники $APBC$ и $H_{PBC}H_{ABC}H_{APC}H_{APB}$ центрально симметричны с центром точке M. По теореме 4 точки H_{PBC}, H_{ABC}, H_{APC}, H_{APB} лежат на равнобокой гиперболе, проходящей через точки A, B, C, P. При симметрии относительно точки M четырёхугольник $APBC$ перейдёт в четырёхугольник $H_{PBC}H_{ABC}H_{APC}H_{APB}$. Вершины этих четырёхугольников лежат на гиперболе, следовательно она перейдёт в себя (иначе две различные гиперболы пересекутся в восьми точках). То есть M — центр гиперболы.

Следствие 7.1. *Центр любой равнобокой гиперболы, описанной около ABC, лежит на фиксированной окружности — окружности Эйлера треугольника ABC.*

Доказательство:

Сделаем гомотетию с центром в точке H_{ABC} и коэффициентом $\frac{1}{2}$, точка P перейдёт в точку M, а описанная окружность треугольника ABC перейдёт в его окружность Эйлера.

Следствие 7.2. *Окружности Эйлера треугольников ABC, DBC, ABD, ACD пересекаются в одной точке. Эта точка называется точкой Эйлера для четвёрки точек A, B, C, D.*

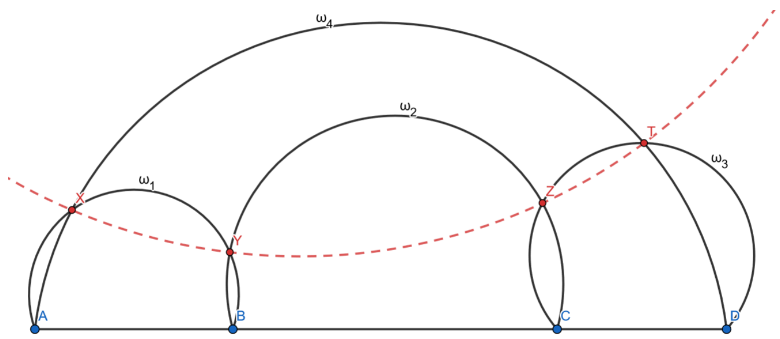
Доказательство:

Применив предыдущее следствие для каждого из треугольников ABC, DBC, ABD, ACD, получаем, что все окружности Эйлера пересекаются в центре равнобокой гиперболы, проходящей через точки A, B, C, D.

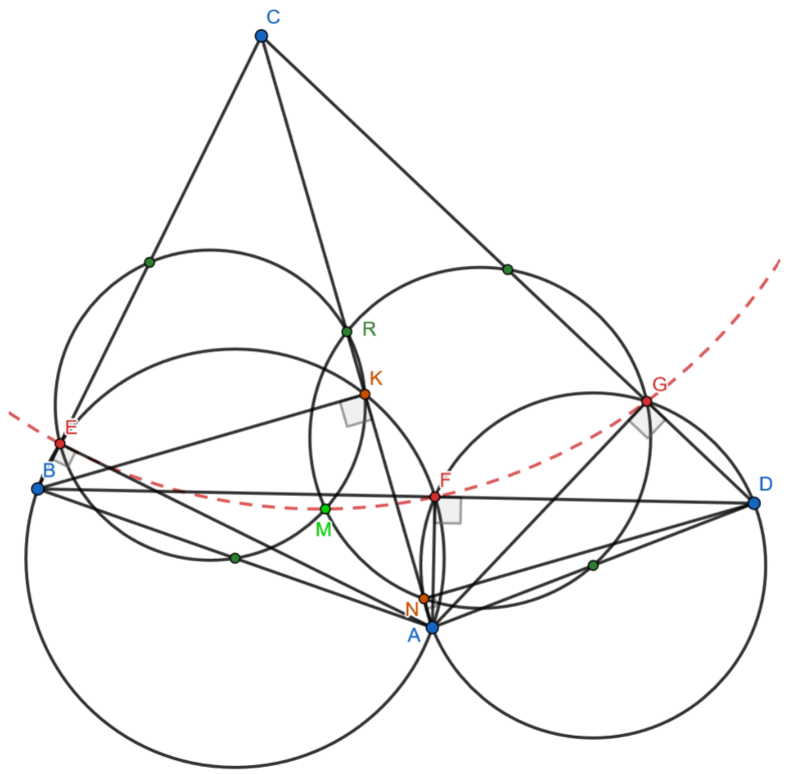
Теорема 8. *В четырёхугольнике $ABCD$ педальные окружности точек A, B, C, D относительно треугольников BCD, ACD, ABD, ABC пересекаются в одной точке — в точке Эйлера четвёрки A, B, C, D.*

Доказательство:

Лемма 2. *Пусть окружности ω_4 и ω_1 пересекаются в точках A и X, ω_1 и ω_2 в точках B и Y, ω_2 и ω_3 в точках C и Z, ω_3 и ω_4 в точках D и T. Оказалось, что точки A, B, C, D лежат на одной прямой, тогда точки X, Y, Z, T лежат на одной окружности.*



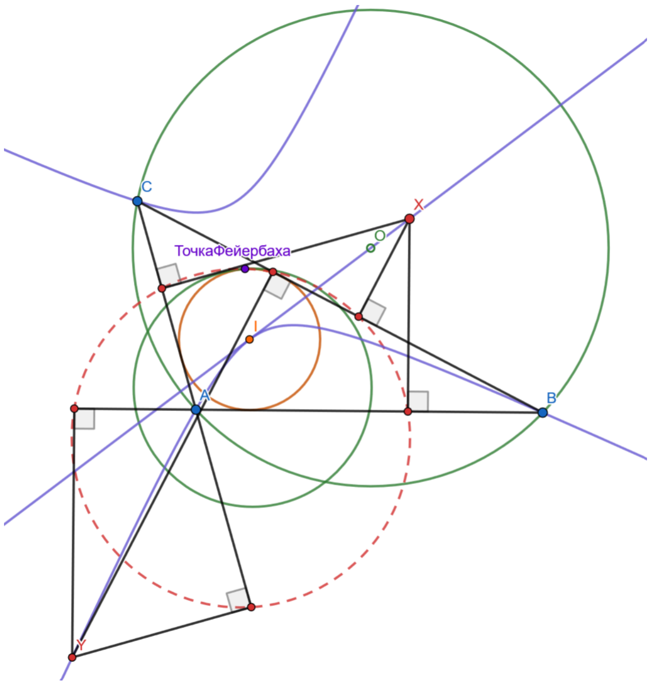
Проведём рассуждение в направленных углах. Пусть $\angle XTD = \beta$, $\angle ZTD = \alpha$, тогда $\angle XTZ = \beta - \alpha$. $\angle ZCB = \alpha$ из вписанности четырёхугольника $CZTB$. $\angle BYZ = \alpha$ из вписанности $BYZC$. $\angle DAX = \beta$ из вписанности $AXTD$. $\angle XYB = \beta$ из вписанности $AXYB$. Значит $\angle XYZ = \beta - \alpha$, то есть $\angle XTZ = \angle XYZ$, значит четырёхугольник $XYZT$ вписанный. Перейдём к исходной задаче.



Пусть точки E, F, G — основания перпендикуляров из точки A на BC, BD, DC. Докажем, что описанная окружность треугольника EFG проходит через точку Эйлера. Пусть точка K — основание перпендикуляра из B на AC, N — основание перпендикуляра из D на AC. Тогда K лежит на окружности Эйлера треугольника ABC и на описанной окружности четырёхугольника $BEFA$ (так как $\angle BKA = \angle BFA = \angle BEA = 90°$). Аналогично N лежит на окружности Эйлера треугольника ADC и на описанной окружности четырёхугольника $AFGD$. Окружности Эйлера пересекаются в точке R — середине стороны AC. Применив выше доказанную лемму для окружностей: Эйлера треугольника ABC, описанной окружности $BEFA$, описанной окружности $AFGD$, Эйлера треугольника ADC и точек $A,\ N,\ K,\ R$ лежащих на одной прямой, получим, что точки $E,\ M,\ F,\ G$ лежат на одной окружности. Аналогичными рассуждениями получим, что педальные окружности точек $B,\ C,\ D$ тоже проходят через точку Эйлера.

Следствие 8.1. ***Теорема Фонтене***

Пусть O — центр описанной окружностии треугольника ABC, I — центр его вписанной окружности. Пусть X — точка на прямой OI. Тогда педальная окружности точки X проходит через точку Фейербаха ABC.



Доказательство:

Покажем, что точка Фейербаха ABC является точкой Эйлера-Понселе четвёрки $A,\ B,\ C,\ I$. Действительно, вписанная окружность это педальная окружность точки I относительно ABC и она касается окружности Эйлера ABC по теореме Фейербаха. Эта точка является точкой Эйлера-Понселе $ABCI$ по теореме, доказанной выше.

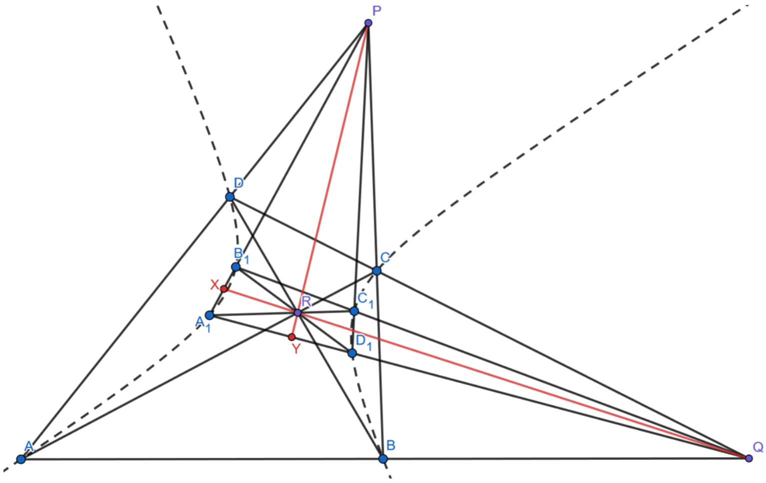
Сделаем изогональное сопряжение относительно треугольника ABC, точка X перейдёт в точку Y. Точка Y будет лежать на конике, описанной около треугольника ABC (по теореме 4), более того, коника будет равнобокой гиперболой, ведь O при изогональном сопряжении перейдёт в ортоцентр треугольника ABC, а коника, проходящая через ортоцентрическую четвёрку обязательно является равнобокой гиперболой (по теореме 6). Педальная окружность точки Y проходит через точку Эйлера $ABCY$, а она является центром равнобокой гиперболы, изогонально сопряженной OI, то есть точкой Эйлера-Понселе четвёрки $A,\ B,\ C,\ I$. Ранее было доказано, педальные окружности точек X и Y совпадают, следовательно утверждение доказано.

Также мы доказали обобщение — педальная окружность точки, лежащей на прямой, проходящей через O, проходит через центр гиперболы, изогонально сопряжённой этой прямой. Это утверждение будем называть **обобщённой теоремой Фонтене**.

Определение 3.4. Пусть точки $E,\ F,\ G$ на сторонах $AB,\ BC,\ AC$ треугольника ABC таковы, что AF, BG, CE пересекаются в одной точке. Тогда треугольник EFG называется чевианным треугольником точки D относительно ABC, а его описанная окружность — чевианной окружностью.

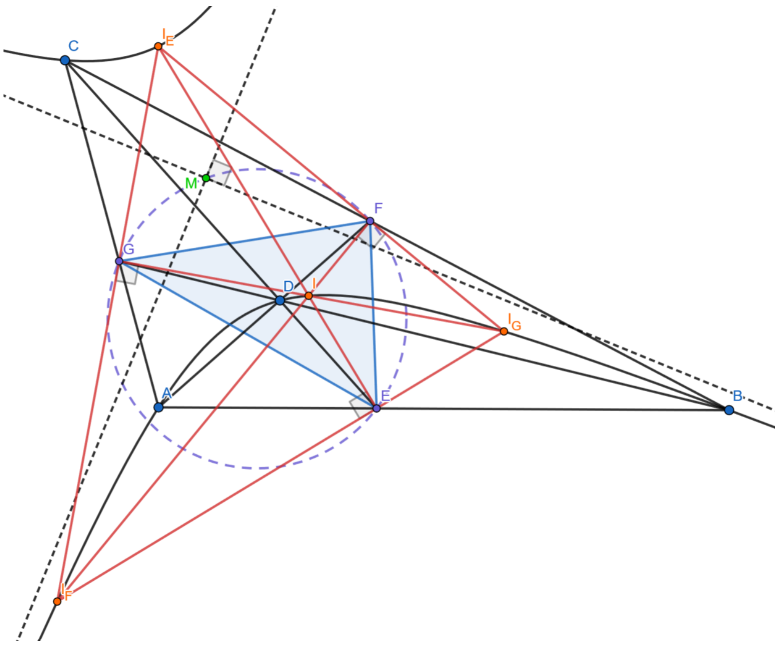
Теорема 9. *Чевианная окружность точки D относительно треугольника ABC проходит через точку Эйлера четвёрки A, B, C, D.*

Доказательство:



Лемма 3. *Два четырёхугольника $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ таковы, что прямые AD, BC, B_1C_1, A_1D_1 пересекаются в одной точке P, прямые AB, CD, A_1B_1, C_1D_1 пересекаются в одной точке Q, а прямые AC, BD, A_1C_1, B_1D_1 пересекаются в одной точке R. Тогда точки A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1 лежат на одной конике.*

Проведём конику через точки A, B, C, D, A_1. RQ — поляра точки P относительно коники, пусть она пересекает PB_1 в точке X. Тогда $[A_1, B_1, X, P] = -1$, следовательно по гармоническому свойству поляр точка B_1 принадлежит конике. Рассматривая поляру точки Q, которая пересекает QB_1 в точке Y, из равенства $[A_1, D_1, Y, Q] = -1$ получаем, что точка D_1 принадлежит конике. Аналогично доказывается, что точка C_1 лежит на конике. Перейдём к исходной задаче.



Как мы выяснили ранее, точка Эйлера четвёрки A, B, C, D это центр равнобокой гиперболы, проходящей через A, B, C, D. Отметим точки I, I_E, I_F, I_G — центры вписанной и вневписанных окружностей треугольника EFG. Заметим, что описанная окружность треугольника EFG является окружностью Эйлера для треугольника $I_E I_F I_G$ (так как EFG — ортотреугольник треугольника $I_E I_F I_G$). Применяя лемму 3 для четырёхугольников $ACBD$ и $II_E I_F I_G$, получим, что точки $A, B, C, D, I, I_E, I_F, I_G$ лежат на одной конике, которая является равнобокой гиперболой, так как проходит через ортоцентрическую четверку I, I_E, I_F, I_G (теорема 6). А следовательно центр этой гиперболы (точка Эйлера $ABCD$) лежит на окружности Эйлера треугольника $I_E I_F I_G$.

Следствие 9.1. ***Теорема Емельяновых*** *Чевианная окружность центра вписанной окружности треугольника ABC проходит через его точку Фейербаха (точка касания вписанной окружности с окружностью Эйлера треугольника).*

Доказательство:

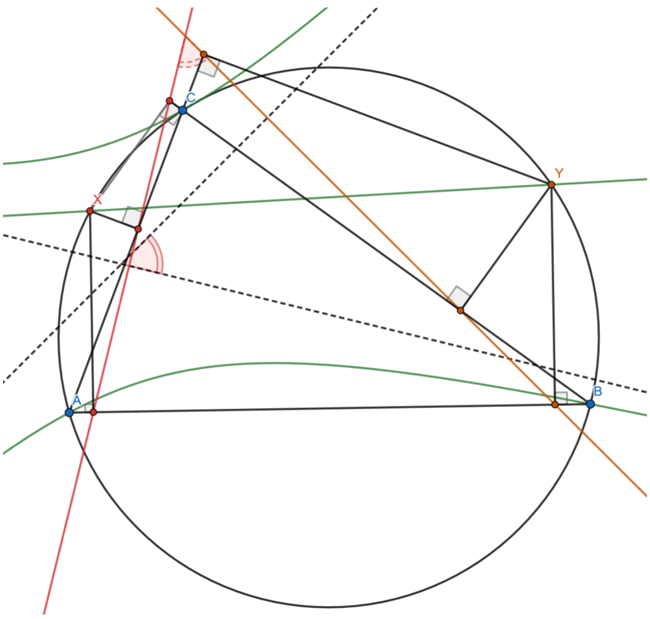
При доказательстве теоремы Фонтене мы поняли, что точка Фейербаха ABC является точкой Эйлера-Понселе четвёрки A, B, C, I. А она лежит на чевианной окружности точки I по доказанному выше.

3.4 Асимптоты гиперболы

Напоминание: Асимптотами гиперболы называются прямые, касающиеся гиперболы в точке, являющейся бесконечно удалённой.

Теорема 10. *Пусть некоторая прямая пересекет описанную окружность трегольника ABC в точках X и Y. Тогда угол между прямыми Симсона точек X и Y равен углу между асимптотами гиперболы, изогонально сопряженной прямой XY.*

Доказательство:



Как мы поняли ранее, точка, изогонально сопряжённая точке на окружности, является бесконечно удалённой точкой, соответствующей напрявлению, перпендикулярному направлению прямой Симсона точки на окружности. Рассмотрим точку X, изогонально сопряженная ей точка — бесконечно удалённая точка гиперболы, а асимптота гиперболы является прямой, соответствующей напрявлению бесконечно удалённой точки гиперболы, а значит направления прямой Симсона и одной из асимптот гиперболы перпендикулярны. Аналогичное утверждение получим для точки Y, а углы между парами перпендикулярных прямых равны.

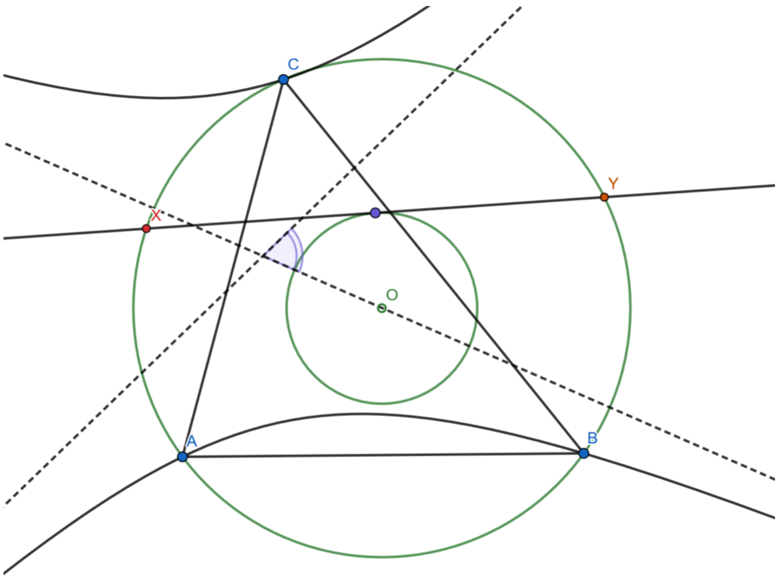
Следствие 10.1. *Если прямая проходит через центр описанной окружности треугольника ABC, то прямые Симсона точек X и Y и есть асимптоты гиперболы.*

Доказательство:

По обобщённой теореме Фонтене прямые Симсона точек X и Y будут проходит через центр гиперболы, а так как гипербола является равнобокой, то есть её асимптоты перпендикулярны, то их направление в точности совпадает с направлениями прямых Симсона (при доказательстве предыдущей теоремы мы выяснили, что направления прямых Симсона точек X и Y перпендикулярны направлениям асимптот), а следовательно прямые Симсона точек X и Y и есть асимптоты гиперболы.

Следствие 10.2. *К окружности ω с центром в точке O и радиусом, меньшим радиуса описанной окружности ABC, провели касательную и рассмотрели её образ при изогональном сопряжении - гиперболу. Тогда угол между асимптотами полученной гиперболы не зависит выбора касательной.*

Доказательство:



Пусть X и Y — точки пересечения касательной к ω с описанной окружностью треугольника ABC. Так как прямая XY касается фиксированной окружности с центром в точке O, то дуга XY имеет фиксированную градусную меру. Как было доказано ранее, угол между прямыми Симсона точек X и Y равен углу между асимптотами гиперболы. А также угол между прямыми Симсона равен половине дуги XY, градусная мера которой фиксирована (про конструкций с прямой Симсона можно прочитать в статье Д. Швецова “От прямой Симсона до теоремы Дроз-Фарни”. В: Квант 6 (2009), с. 34—37). То есть мы получили, что угол между асимптотами фиксирован и равен половине дуги XY.

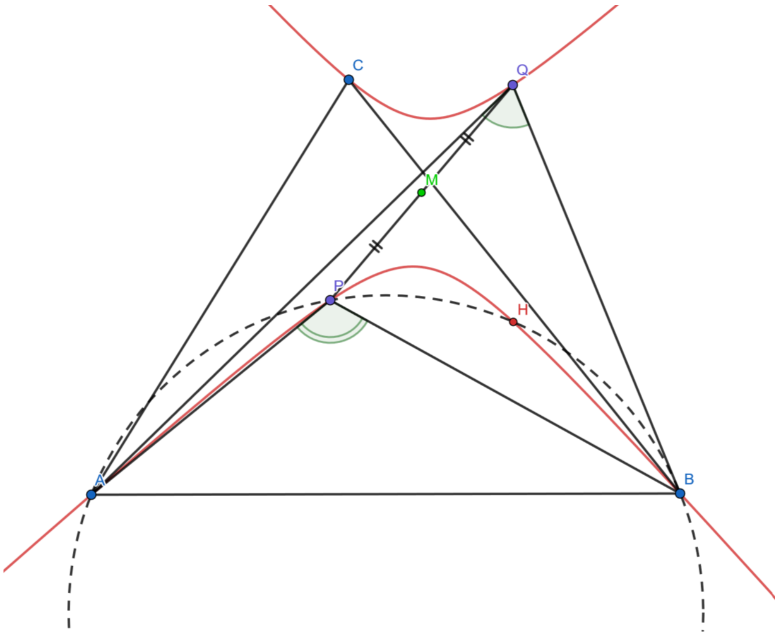
Замечание: При нулевом радиусе окружности ω утверждение будет звучать так: Гипербола, изогонально сопряженная прямой, проходящей через точку O - равнобокая. То есть мы доказали обобщение теоремы 6.

3.5 Антигонально сопряжённые точки

Определение 3.5. Через точки A, B и C проходит равнобокая гипербола с центром в точке M. Точка P лежит на гиперболе. Точка Q симметрична точке P относительно M. Тогда точки P и Q называются антигонально сопряжёнными относительно треугольника ABC.

Замечание: Точки P и Q являются антигонально сопряженными в любом треугольнике с вершинами на гиперболе.

Теорема 11. *Если точки P и Q антигонально сопряжены относительно треугольника ABC, то направленные углы $\angle APB = AQB$, $\angle BPC = BQC$ и $\angle APC = AQC$.*



Доказательство:

Докажем, $\angle APB = AQB$. Отметим точку H — ортоцентр треугольника AQB. Тогда точка Q — ортоцентр AHB, поэтому точка P лежит на описанной окружности треугольника AHB по теореме 7, то есть $\angle APB = AQB$. Аналогично доказываются равенства $\angle BPC = BQC$ и $\angle APC = AQC$.

4 Заключение

По итогам исследования, удалось доказать множество теорем, которые возможно применить при решении задач. Цель исследования достигнута и решены все поставленные задачи.

Основные результаты исселодвания:

1. Получено полное описание построения изогонально сопряженной к данной точке
2. Доказано, что при изогональном сопряжении прямая переходит в описанную конику
3. Доказано, что педальные окружности изогонально сопряженных точек совпадают

4. Доказано, что коника, проходящая через ортоцентрическую четвёрку точек, обязательно является равнобокой гиперболой

5. Получено описание описанных гипербол с данным углом между асимптотами

6. Доказано, что центр равнобокой гиперболы, проходящую через данные 4 точки, является точкой Эйлера-Понселе данной четвёрки точек (а вместе с тем доказано их существование)

7. Доказано свойство антигонально сопряжённых точек

8. Доказано теорема Емельяновых и её обобщение

9. Доказана теорема Фонтене и её обобщение

Список литературы

[1] Сосинский А.Б. Геометрии: МЦНМО, 2017

[2] Д. Швецов “От прямой Симсона до теоремы Дроз-Фарни”. В: Квант 6 (2009), с. 34—37