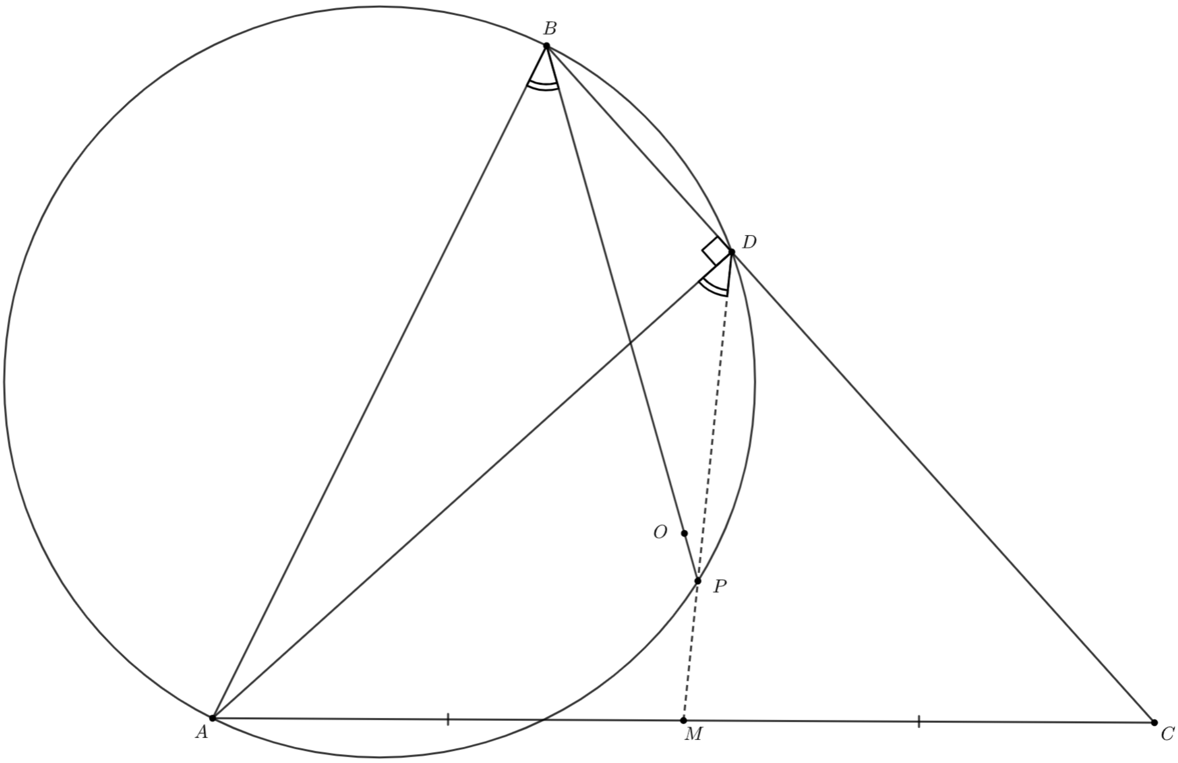
Устная олимпиада по геометрии
Лицей НИУ ВШЭ

27 октября 2024
10-11 класс

1. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC, в котором провели высоту AD. Прямая BO пересекает окружность, описанную вокруг треугольника ABD, в точке P. Докажите, что прямая DP проходит через середину отрезка AC.

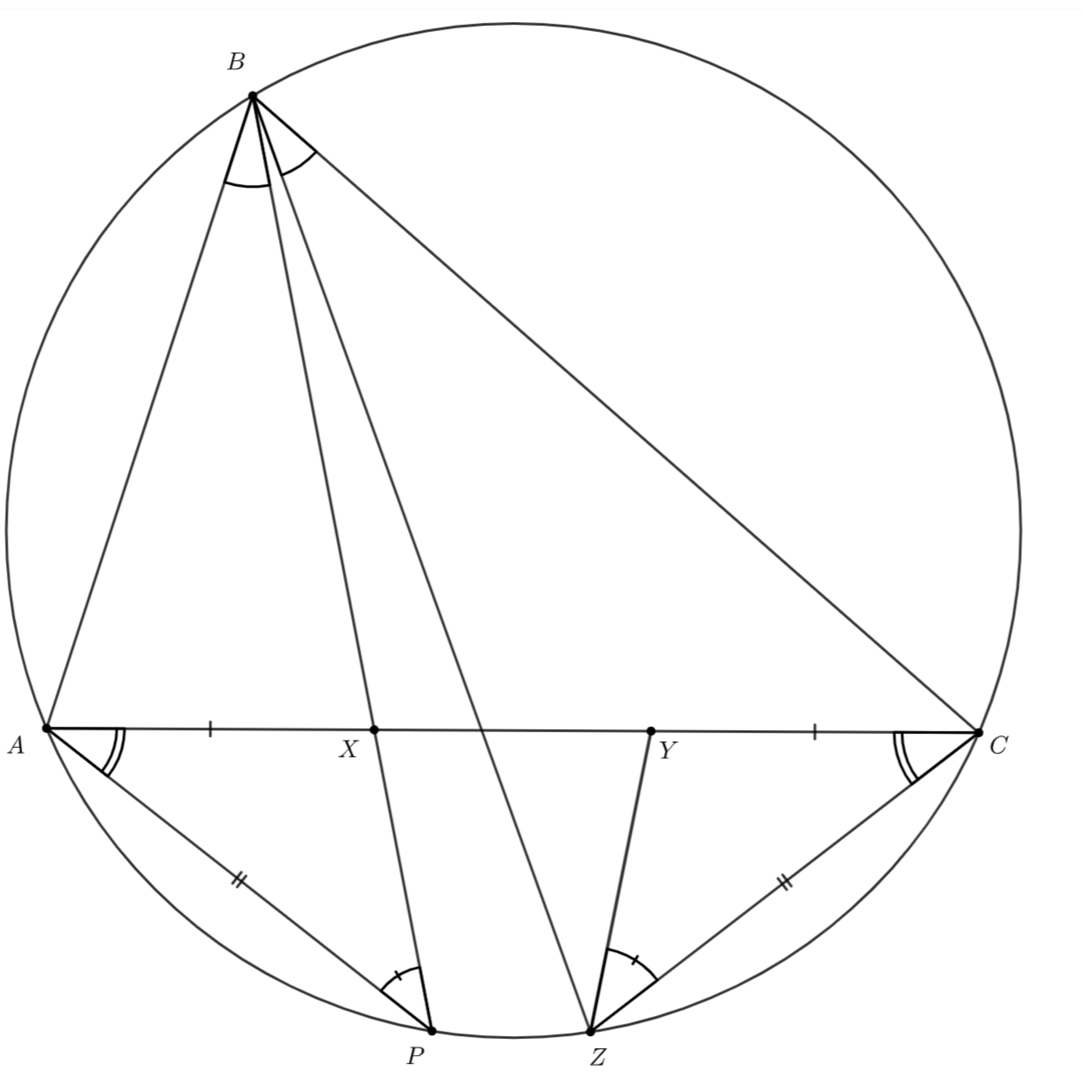
Алексей Поздеев Ярослав Щербатов



Решение. Пусть точка M — середина стороны AC. Достаточно заметить, что $\angle ADP = \angle ABO = 90^\circ - \angle C = \angle ADM$ (так как M — медиана в прямоугольном треугольнике ADC). Это и означает искомое.

2. На стороне AC треугольника ABC выбрана точка X. Затем её отразили относительно середины стороны AC и получили точку Y. Точка Z на описанной окружности треугольника ABC такова, что прямые BX и BZ симметричны относительно биссектрисы $\angle ABC$. Докажите, что значение угла $\angle CZY$ не зависит от выбора точки X.

Максим Векшин

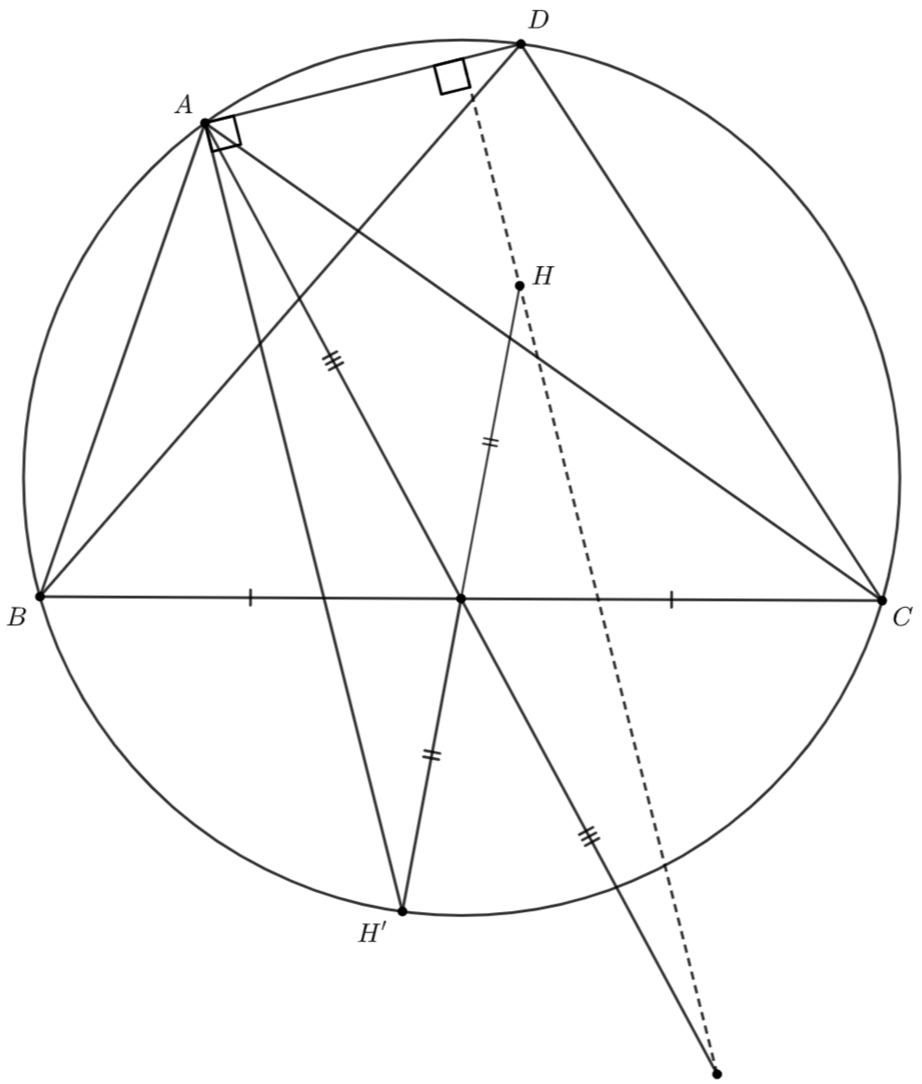


Решение. Продлим прямую BX до пересечения с описанной окружностью треугольника ABC в точке P. Так как $\angle ABP = \angle CBZ$, то хорды AP и CZ равны и $\angle CAP = \angle ACZ$. Значит треугольники APX и CZY равны и искомый угол $\angle CZY = \angle APX = \angle ACB$, который не зависит от точки X.

Примечание. То есть доказано, что прямая ZY проходит через фиксированную точку, дополняющую треугольник ABC до равнобедренной трапеции с основанием AC.

3. На описанной окружности треугольника ABC взята точка D. Через ортоцентр H треугольника BCD провели прямую ℓ, перпендикулярную AD. Докажите, что ℓ проходит через точку, не зависящую от точки D.

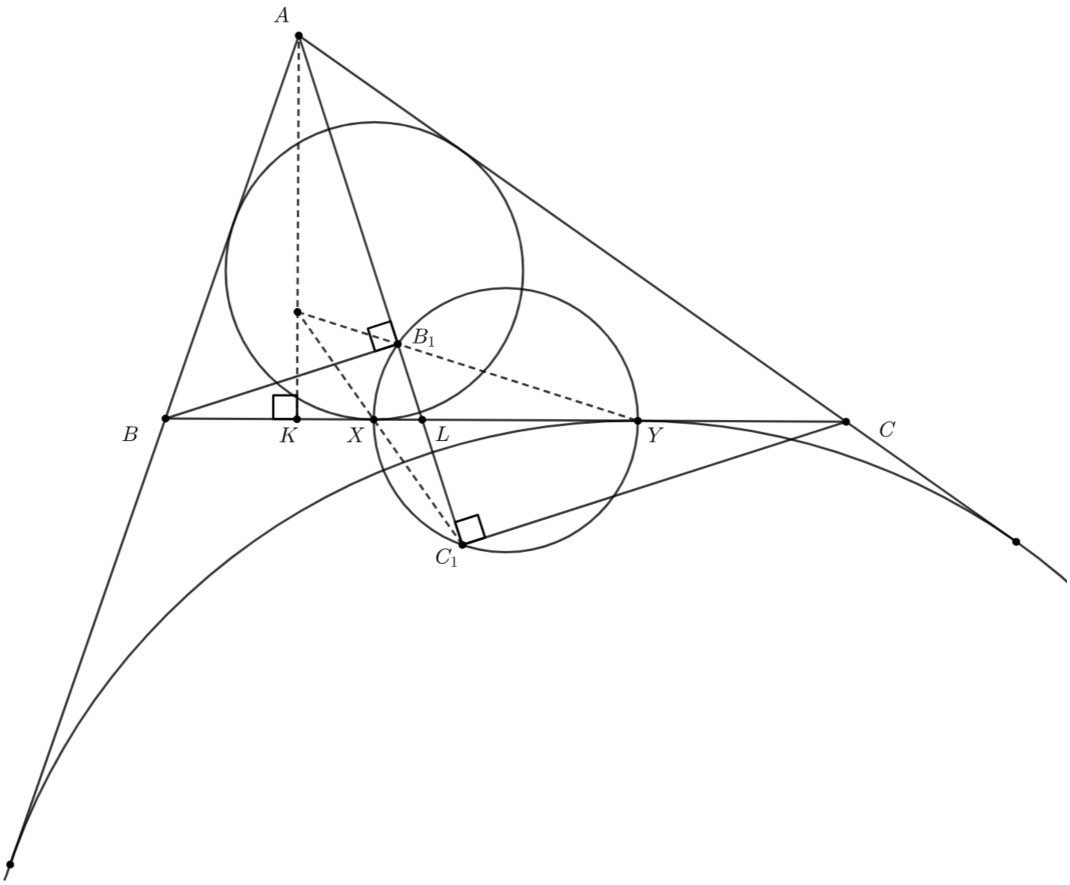
Ярослав Щербатов



Решение. Как известно, при симметрии относительно середины стороны ортоцентр переходит в точку, диаметрально противоположную вершине. Тогда при симметрии относительно середины стороны BC точка H переходит в H', которая лежит на описанной окружности треугольника BCD и является точкой, диаметрально протиположной точке D. Значит $\angle H'AD = 90^\circ \Rightarrow AH' \parallel \ell$, то есть при симметрии относительно середины стороны BC ℓ переходит в AH', которая проходит через фиксированную точку $A \Rightarrow$ все прямые ℓ проходят через точку, симметричную A относительно середины стороны BC.

4. Вписанная и A-вневписанная окружности треугольника ABC касаются стороны BC соответственно в точках X и Y. Пусть B_1 и C_1 — проекции соответственно точек B и C на биссектрису угла A, а K — основание высоты треугольника ABC, проведённой из вершины A. Докажите, что прямые AK, XC_1, YB_1 пересекаются в одной точке.

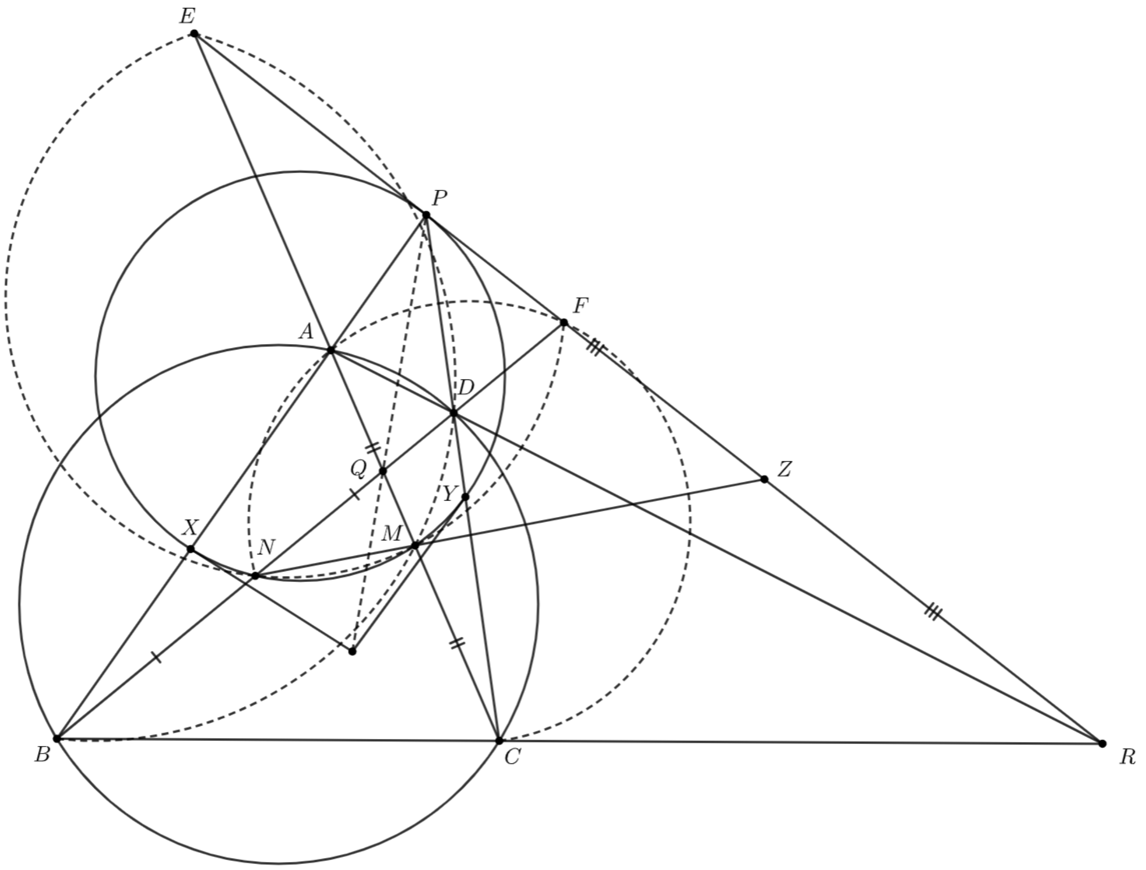
Станислав Кузнецов



Решение. Точки B_1, C_1, X, Y лежат на окружности с диаметром XY (следует из *леммы 255*). Пусть точка L — основание биссектрисы из вершины A. Тогда $[A, L; B_1, C_1] = -1$, так как эта четвёрка переносится в $[P, L; B, C]$ (где точка P — основание внешней биссектриссы угла A) проекцией, параллельной AP. Поэтому высота AK — поляра точки L относительно окружности (B_1C_1XY), а следовательно на ней лежит точка пересечения прямых XC_1 и YB_1.

5. Точки M и N — соответственно середины пересекающихся в точке Q диагоналей AC и BD вписанного четырёхугольника $ABCD$. Прямые AB и CD пересекаются в точке P. Описанная окружность ω треугольника PMN вторично пересекает прямые AB и CD в точках X и Y. Докажите, что касательные к ω, проведённые через точки X и Y, пересекаются на прямой PQ.

Максим Векшин



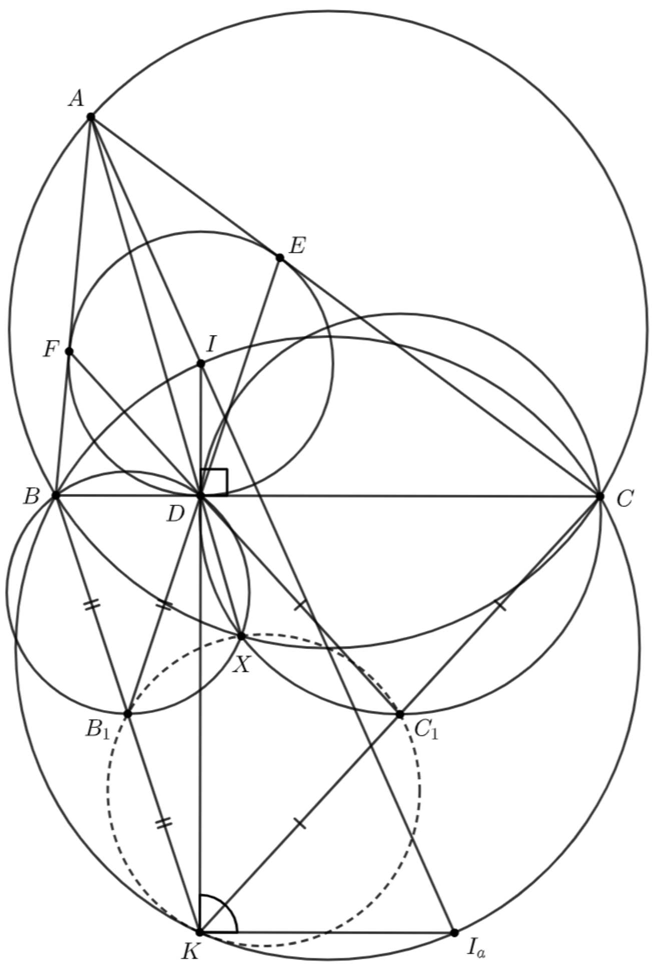
Решение. Пусть прямые BC и AD пересекаются в точке R. Докажем, что прямая PR касается ω, тогда так как $[PA, PD; PQ, PR] = -1$, то прямая PQ будет симедианой треугольника XPY, что равносильно утверждению задачи. Пусть диагональ AC пересекает прямую PR в точке E, а диагональ BD в точке F.

Докажем вписанность четырёхугольника $MEBD$: будем проверять равенство $EQ{\cdot}QM = DQ \cdot QB$. Имеем $DQ \cdot QB = AQ \cdot QC$ из вписанности $ABCD$. Заметим, что четвёрка $[A, C; Q, E]$ гармоническая, а M — середина AC, значит при инверсии с центром в точке M и радиусом AM точки Q и E меняются местами, то есть $MQ \cdot ME = MA^2$. Тогда $EQ \cdot QM = AQ \cdot QC$ (это равенство несложно проверяется, например, можно ввести координаты на прямой AC так, чтобы 0 был в точке M, а $AM = 1$). Аналогично получаем вписанность $NFAC$. Из вписанностей четырёхугольников $MEBD$ и $NFAC$ следует, что $MNEF$ вписанный (рассмотрим степень точки Q). Пусть MN пересекает PR в точке Z, тогда $ZN \cdot ZM = ZE \cdot ZF$. Точка Z — середина PR (прямая Гаусса), значит $ZP^2 = ZE \cdot ZF$ (так как $[P, Q; E, F]$ гармоническая четвёрка). Откуда получаем, что $ZP^2 = ZM \cdot ZN$, то есть прямая PZ касается ω.

Примечание. Касание ω и PR равносилено тому, что точка M является N-точкой Шалтая треугольника PNR. Это можно независимо показать, доказав, что точки M и N симметричны относительно центра равнобокой гиперболы, проходящей через точки M, N, Q, R, Q и середины сторон четырёхугольника $ABCD$.

6. Вписанная окружность треугольника ABC касается его сторон BC, CA, AB соответственно в точках D, E, F. На прямых DE и DF взяты соответственно точки B_1 и C_1 таким образом, что $BB_1 = DB_1$ и $CC_1 = DC_1$. Прямая AD вторично пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке X. Найдите радиус описанной окружности треугольника B_1XC_1, если $II_a = 1$, где I — центр вписанной окружности, а I_a — центр A-вневписанной окружности треугольника ABC.

Ярослав Щербатов



Решение. Пусть K — проекция точки I_a на ID. Так как $\angle IBI_a = \angle ICI_a = \angle IKI_a = 90^\circ$, то B, C, I, I_a, K лежат на одной окружности. Заметим, что $\angle CBK = \angle CID = 90^\circ - \frac{\angle C}{2} = \angle CDE = \angle CBB_1 \Rightarrow B, B_1, K$ лежат на одной прямой, причем точка B_1 является серединой BK. Аналогично C_1 - середина отрезка CK. Так же отметим, что $\angle BB_1D = 180^\circ - 2\angle BDB_1 = \angle C = \angle BXD \Rightarrow BB_1DX$ — вписанный. Аналогично CC_1DX - вписанный. Тогда B_1C_1KX — вписанный, ведь $\angle XB_1K = \angle XDB = \angle XC_1C$, причем из фактов выше получаем, что эта окружность является образом описанной окружности треугольника BCK при гомотетии с центром в точке K и коэффициентом

$k = \frac{1}{2} \Rightarrow$ искомый радиус это половина радиуса описанной окружности треугольника BIC, то есть $R_{XB_1C_1} = \frac{R_{BIC}}{2} = \frac{II_a}{4} = \frac{1}{4}$.