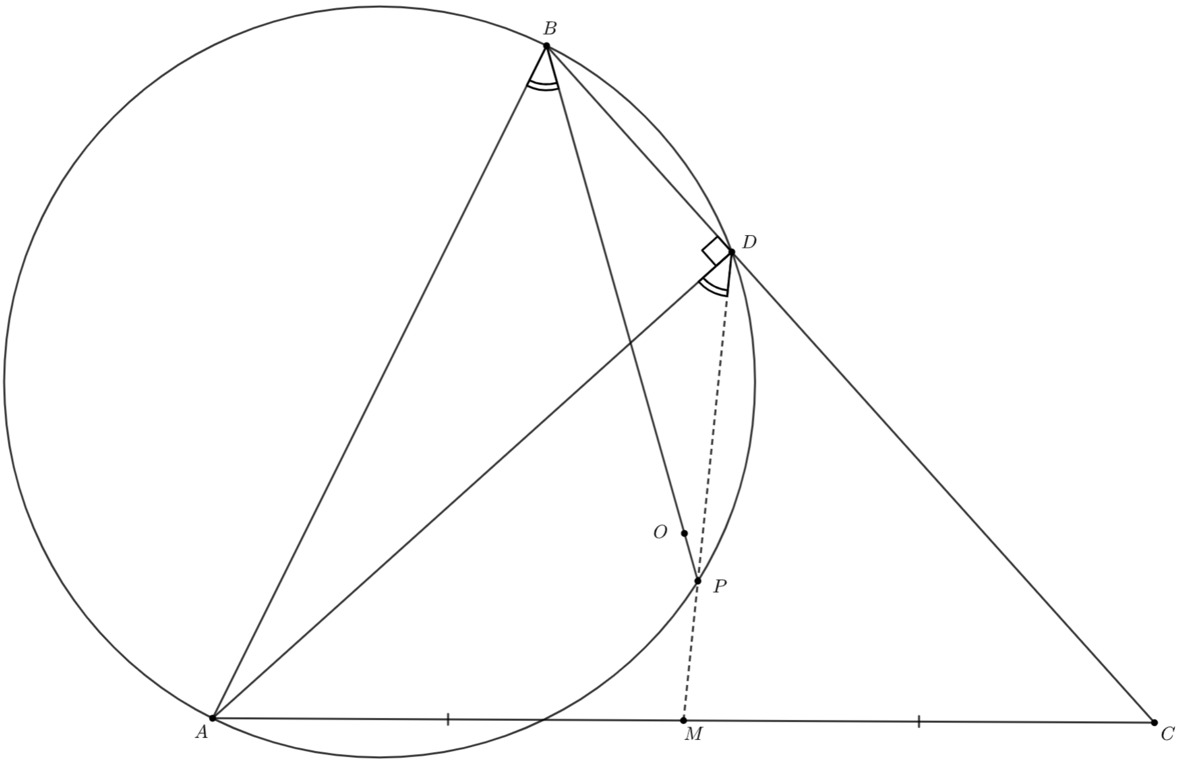
Устная олимпиада по геометрии
Лицей НИУ ВШЭ

27 октября 2024
9 класс

1. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC, в котором провели высоту AD. Прямая BO пересекает окружность, описанную вокруг треугольника ABD, в точке P. Докажите, что прямая DP проходит через середину отрезка AC.

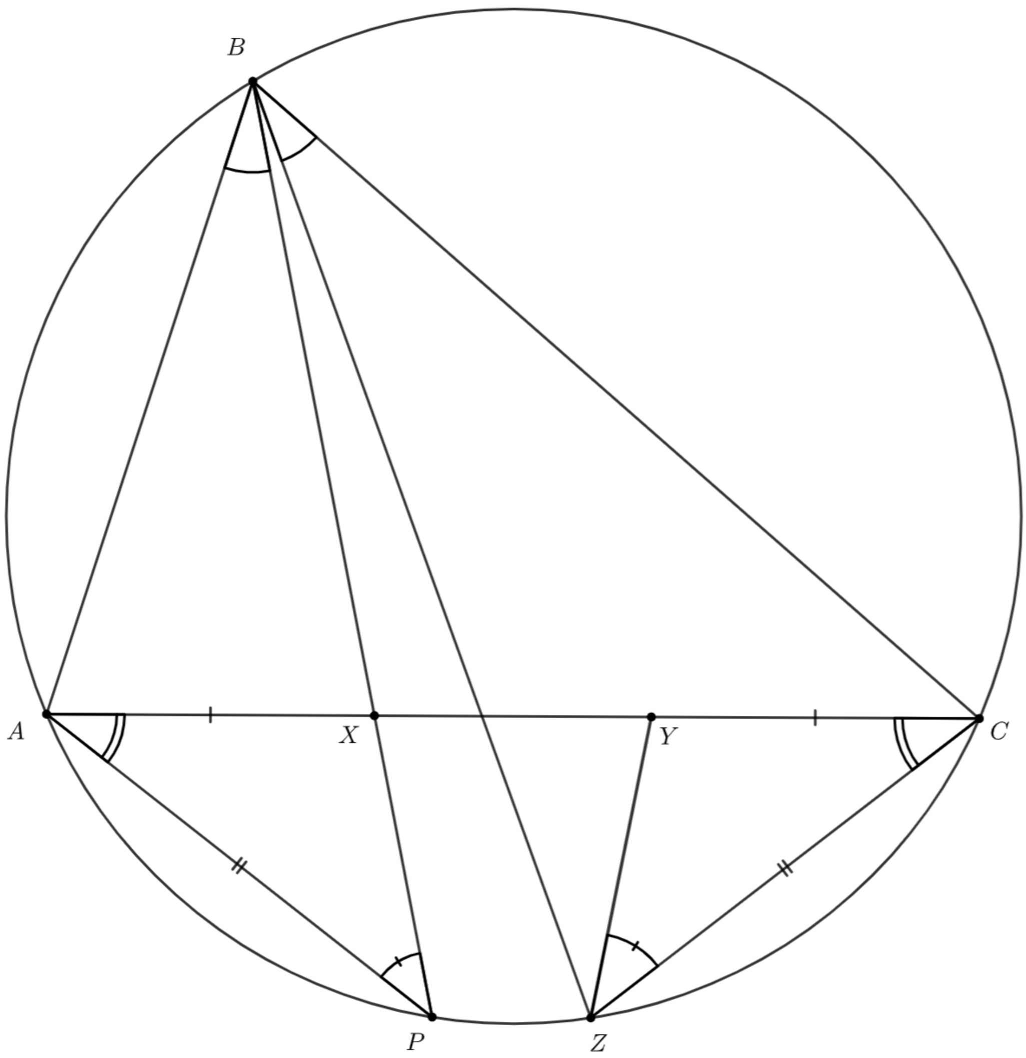
Алексей Поздеев Ярослав Щербатов



Решение. Пусть точка M — середина стороны AC. Достаточно заметить, что $\angle ADP = \angle ABO = 90^\circ - \angle C = \angle ADM$ (так как M — медиана в прямоугольном треугольнике ADC). Это и означает искомое.

2. На стороне AC треугольника ABC выбрана точка X. Затем её отразили относительно середины стороны AC и получили точку Y. Точка Z на описанной окружности треугольника ABC такова, что прямые BX и BZ симметричны относительно биссектрисы $\angle ABC$. Докажите, что значение угла $\angle CZY$ не зависит от выбора точки X.

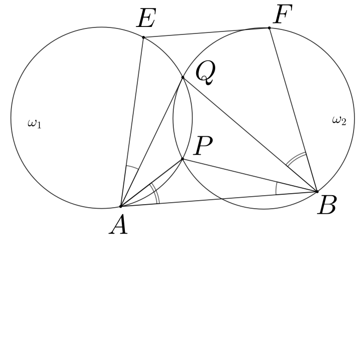
Максим Векшин

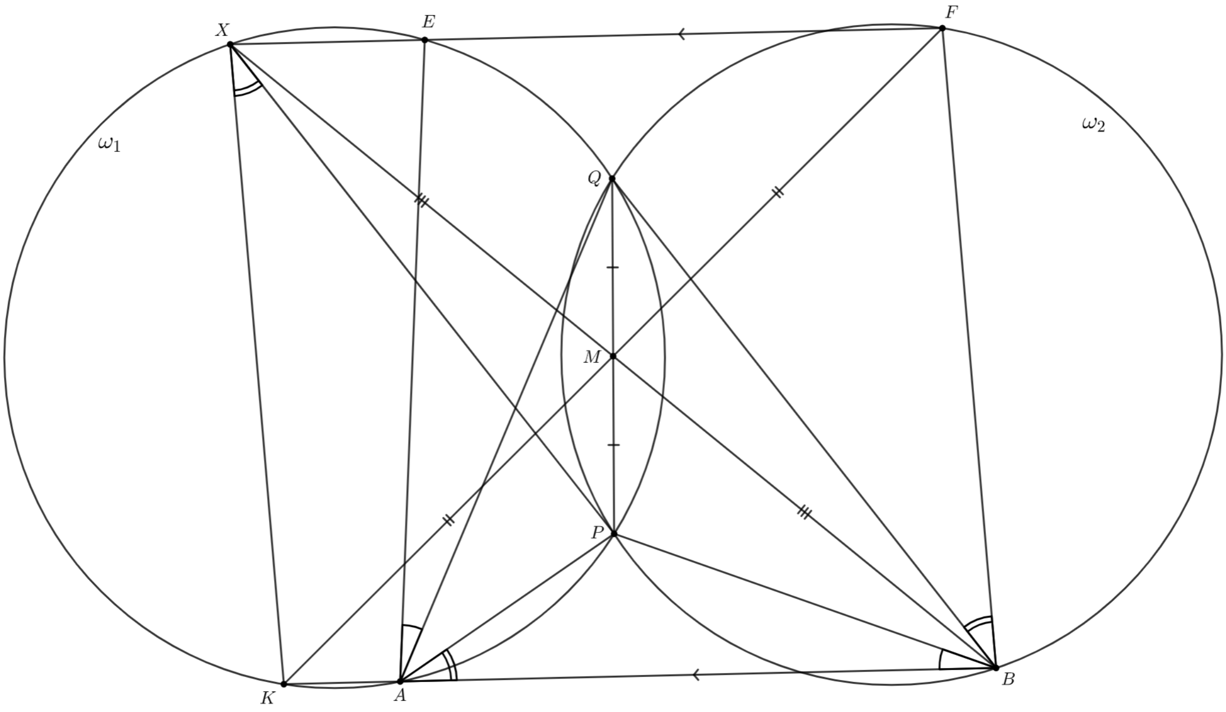


Решение. Продлим прямую BX до пересечения с описанной окружностью треугольника ABC в точке P. Так как $\angle ABP = \angle CBZ$, то хорды AP и CZ равны и $\angle CAP = \angle ACZ$. Значит треугольники APX и CZY равны и искомый угол $\angle CZY = \angle APX = \angle ACB$, который не зависит от точки X.
Примечание. То есть доказано, что прямая ZY проходит через фиксированную точку, дополняющую треугольник ABC до равнобедренной трапеции с основанием AC.

3. Равные окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках P и Q (см. рис.). На ω_1 и ω_2 выбраны соответственно точки A и B. Точка E на ω_1 такова, что $\angle QAE = \angle PBA$. Точка F на ω_2 такова, что $\angle QBF = \angle PAB$. Докажите, что $EF \parallel AB$.

Максим Векшин

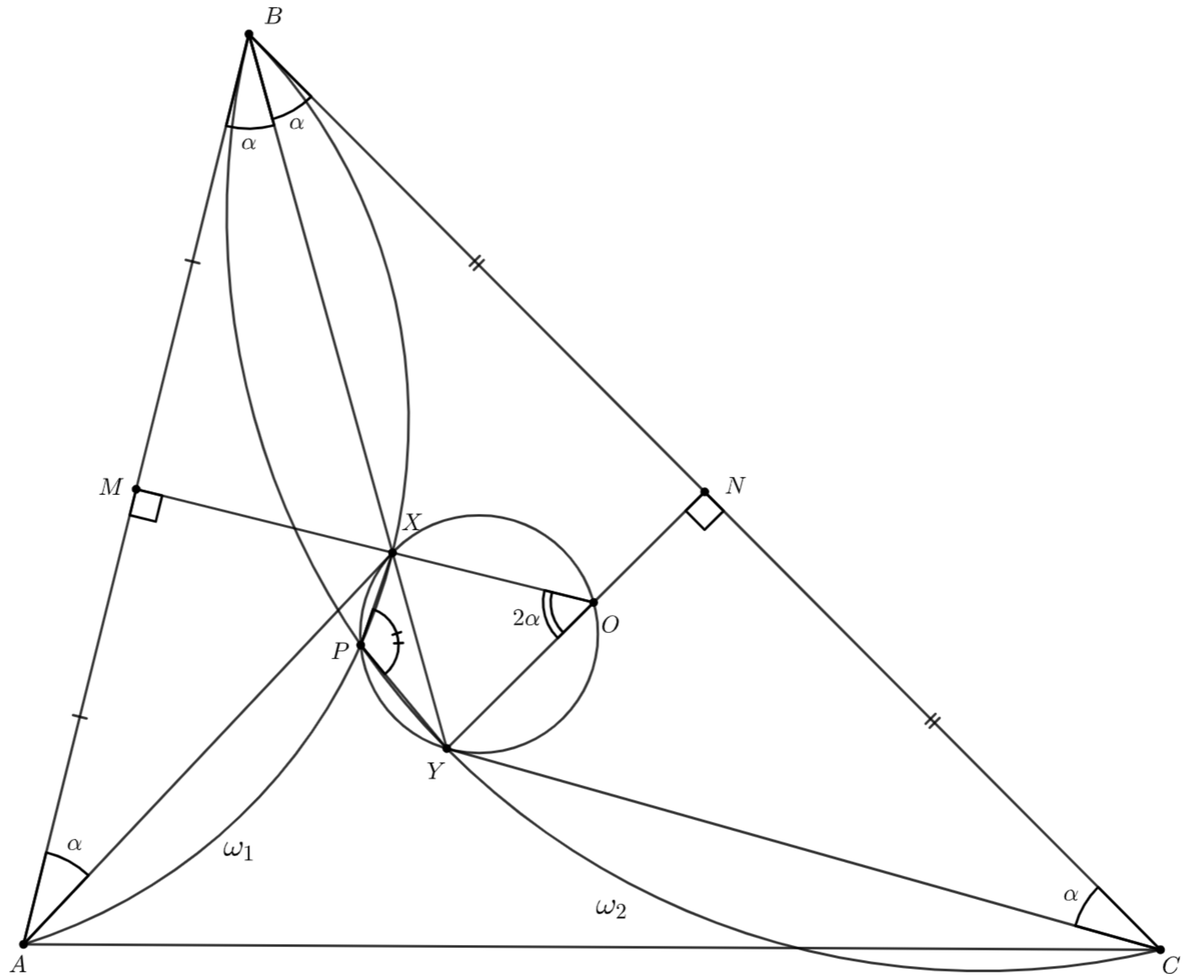




Решение. Докажем, что точка F лежит на прямой, симметричной прямой AB относительно середины PQ (далее применим аналогичное утверждение для точки E и получим, что прямая EF симметрична прямой AB, следовательно они параллельны). Пусть точка M — середина PQ, прямая AB вторично пересекает ω_1 в точке K. Переопределим точку F как пересечение прямой MK с ω_2, то есть точка F симметрична точке K относительно точки M (так как $\omega_1 = \omega_2$). Пусть X — точка пересечения BM с ω_1, лежащая на дуге (QAP). Тогда угол $\angle FBQ = \angle KXP$ из симметрии относительно M (смотрим на образ $\angle FBQ$), а $\angle KXP = \angle PAB$ из вписанности в ω_2. Значит нами определённая точка F совпадает с точкой F из условия задачи.

4. Окружность ω_1 касается стороны BC треугольника ABC в точке B и проходит через точку A, а окружность ω_2 касается стороны AB в точке B и проходит через точку C. Биссектриса угла ABC пересекает окружности ω_1 и ω_2 в точках X и Y соответственно. Окружности ω_1 и ω_2 вторично пересекаются в точке P. Докажите, что центр O описанной окружности треугольника ABC лежит на окружности, проходящей через точки X, P, Y.

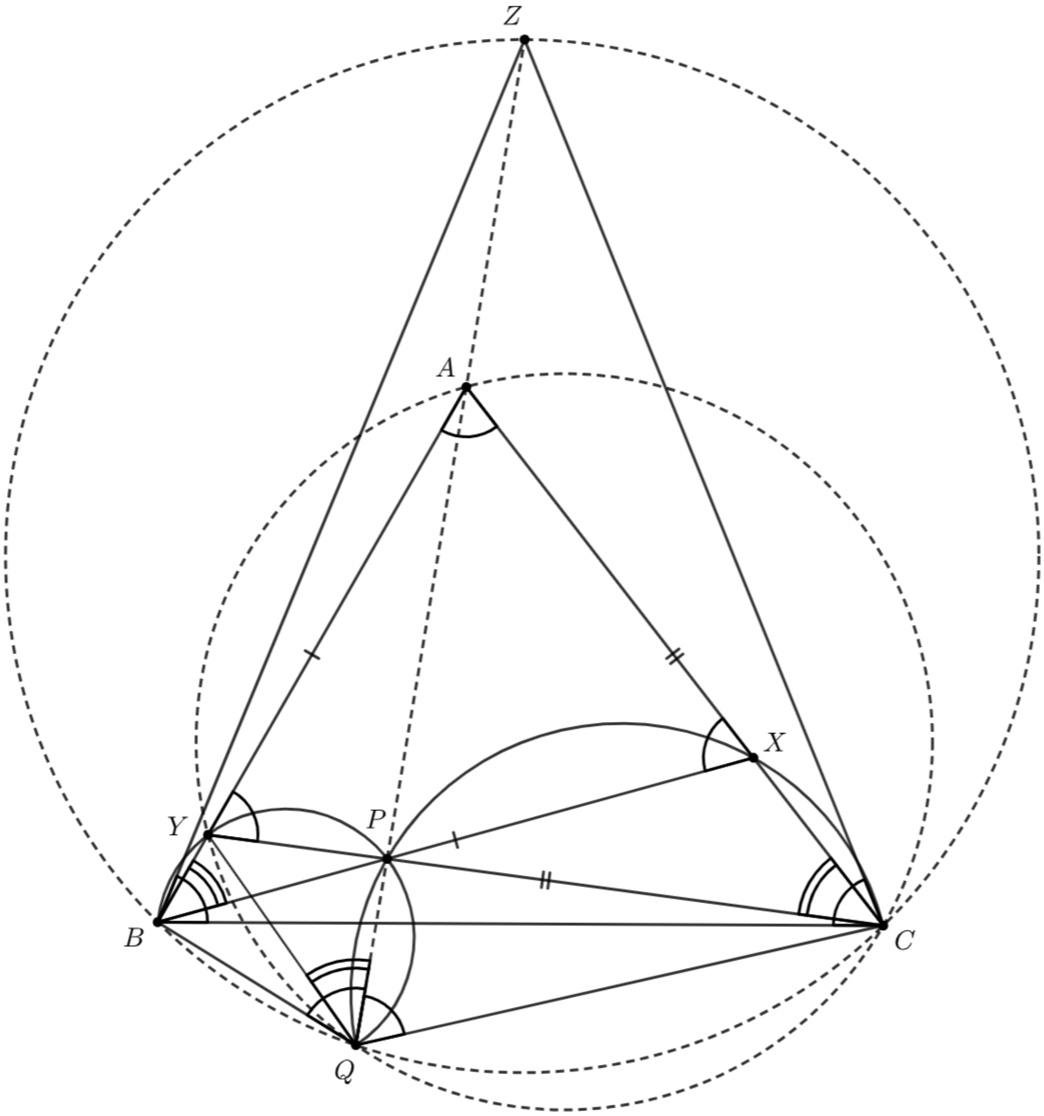
Максим Векшин



Решение. Проведём рассуждения в направленных углах. Пусть $\angle(AB, BC) = 2\alpha$, тогда $\angle(AX, AB) = \angle(XB, BC) = \alpha$, так как ω_1 касается BC, значит $\angle(AX, AB) = \angle(AB, BX)$, откуда $AX = BX$, аналогично $CY = BY$. Пусть точки M и N — середины сторон AB и BC соответственно. Тогда точки M, X, O лежат на одной прямой — серединном перпендикуляре к отрезку AB, аналогично с точками N, Y, O. Из вписанности четырёхугольника $OMBN$: $\angle(AB, BC) = \angle(OM, ON) = \angle(OX, OY) = 2\alpha$. Также имеем равенство углов: $\angle(PA, PX) = \alpha$, $\angle(PY, PC) = \alpha$. Также $\angle(AP, PC) = \angle(AB, BC) + \angle(PA, AB) + \angle(BC, CP) = \angle(AB, BC) + \angle(PB, BC) + \angle(AB, BP) = 2\angle(AB, BC) = 4\alpha$. Из этих равенств следует, что $\angle(XP, PY) = 2\alpha = \angle(OX, OY)$, то есть точки O, X, P, Y коцикличны.

5. На сторонах AC и AB остроугольного треугольника ABC выбраны соответственно точки X и Y так, что $BA = BX$ и $CA = CY$. Прямые BX и CY пересекаются в точке P. Точка Z такова. что $\angle ZBC = \angle ZCB = \angle BAC$, причём точки A и Z лежат по одну сторону от прямой BC. Докажите, что точки A, P, Z лежат на одной прямой.

Станислав Кузнецов Георгий Галяпин

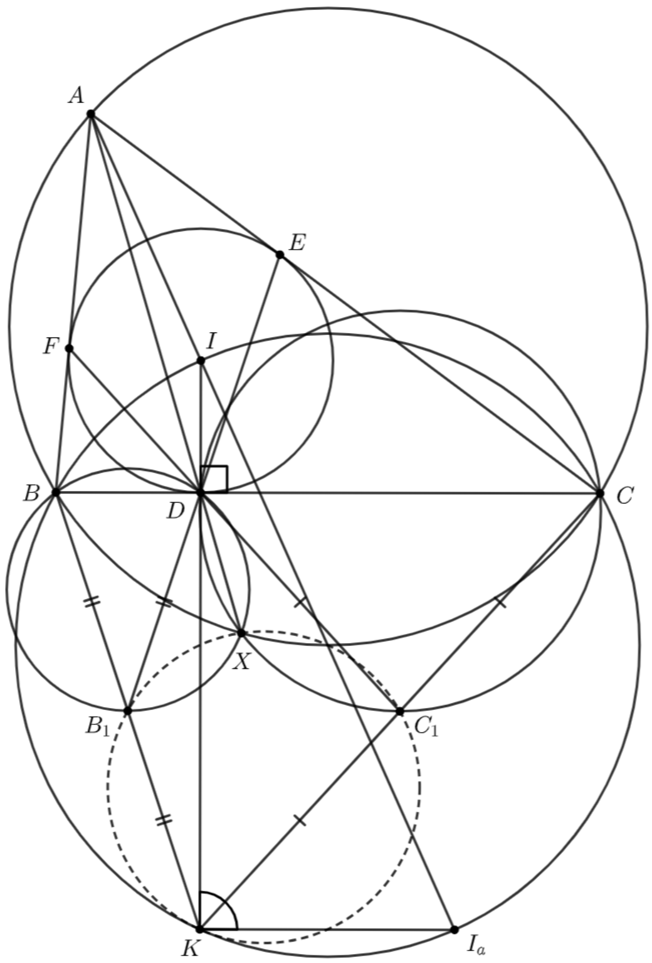


Решение. Пусть P, Q — точки пересечения окружностей (BPY) и (CPX). Имеем равенство направленных углов: $\angle(BQ, QC) = \angle(BQ, QP) + \angle(PQ, QC) = \angle(BY, YP) + \angle(PX, XC) = \angle(BY, YC) + \angle(BX, XC) = \angle(BZ, ZC)$, поэтому точка Z лежит на окружности (BQC). Отсюда $\angle(BQ, QZ) = \angle(BC, CZ) = \angle(BY, YC) = \angle(BQ, QP)$, поэтому точка Q лежит на прямой PZ. Теперь заметим, что Q — точка Микеля четырёхсторонника $BXCY$, а значит, она лежит на окружности (ACY). Отсюда следует равенство $\angle(YQ, QA) = \angle(YC, CA) = \angle(YB, BP) = \angle(YQ, QP)$, а значит, точки P, Q, A лежат на одной прямой вместе с точкой Z.

Примечание. Задача напрямую следует из теоремы Паскаля, применённой к вырожденному шестиугольнику $BBYCCX$.

6. Вписанная окружность треугольника ABC касается его сторон BC, CA, AB соответственно в точках D, E, F. На прямых DE и DF взяты соответственно точки B_1 и C_1 таким образом, что $BB_1 = DB_1$ и $CC_1 = DC_1$. Прямая AD вторично пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке X. Найдите радиус описанной окружности треугольника B_1XC_1, если $II_a = 1$, где I — центр вписанной окружности, а I_a — центр A-вневписанной окружности треугольника ABC.

Ярослав Щербатов



Решение. Пусть K — проекция точки I_a на ID. Так как $\angle IBI_a = \angle ICI_a = \angle IKI_a = 90°$, то B, C, I, I_a, K лежат на одной окружности. Заметим, что $\angle CBK = \angle CID = 90° - \frac{\angle C}{2} = \angle CDE = \angle CBB_1 \Rightarrow B, B_1, K$ лежат на одной прямой, причем точка B_1 является серединой BK. Аналогично C_1 - середина отрезка CK. Так же отметим, что $\angle BB_1D = 180° - 2\angle BDB_1 = \angle C = \angle BXD \Rightarrow BB_1DX$ — вписанный. Аналогично CC_1DX - вписанный. Тогда B_1C_1KX — вписанный, ведь $\angle XB_1K = \angle XDB = \angle XC_1C$, причем из фактов выше получаем, что эта окружность является образом описанной окружности треугольника BCK при гомотетии с центром в точке K и коэффициентом

$k = \frac{1}{2} \Rightarrow$ искомый радиус это половина радиуса описанной окружности треугольника BIC, то есть $R_{XB_1C_1} = \frac{R_{BIC}}{2} = \frac{II_a}{4} = \frac{1}{4}$.