

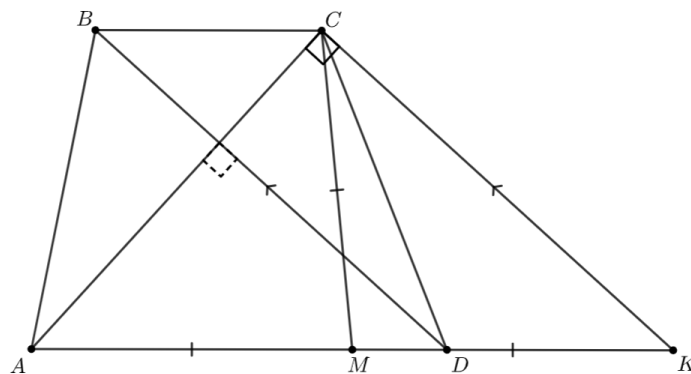
Устная олимпиада по геометрии Лицей НИУ ВШЭ

27 октября 2024

8 класс

1. На большем основании AD трапеции $ABCD$ выбрана такая точка M , что каждый из отрезков AM и CM равен средней линии данной трапеции. Докажите, что диагонали трапеции $ABCD$ перпендикулярны.

Анна Гуляровская



Решение. Проведем прямую, параллельную диагонали BD трапеции и проходящую через точку C . Обозначим пересечение этой прямой и основания AD — точку K , тогда $DBCK$ — параллелограмм, $AK = AD + BC$. Значит, CM — медиана треугольника ACK и $CM = \frac{1}{2}AK$. Следовательно, треугольник ACK — прямоугольный, то есть AC перпендикулярно CK , а так как BD и CK параллельны, то диагонали трапеции перпендикулярны.

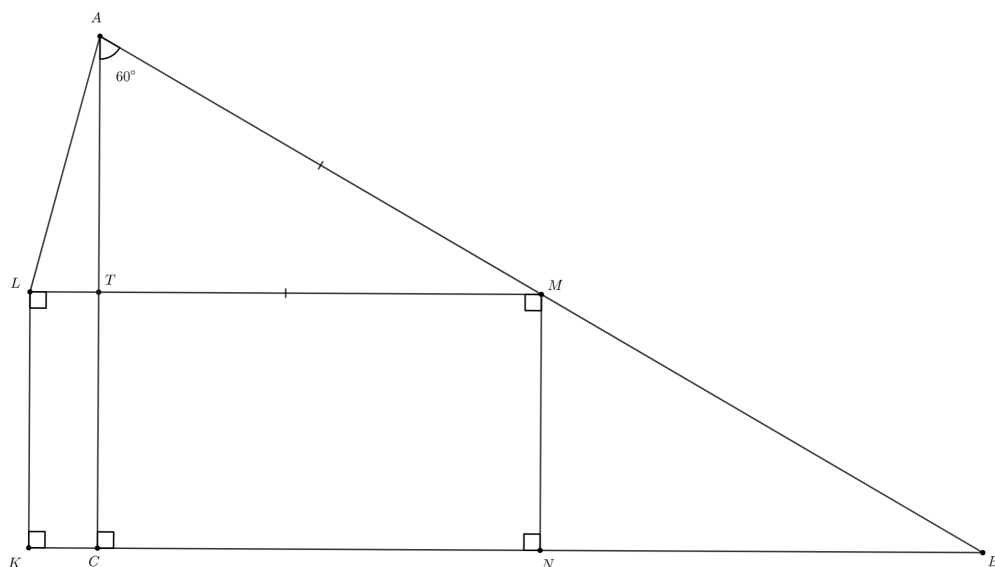
2. Точки M и N — середины соответственно сторон AB и BC прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C . Точки K и L таковы, что $MNKL$ — прямоугольник, причём $2MN = NK$ и точки K и L лежат с точками A и C в одной полуплоскости относительно прямой MN . При каких значениях угла A треугольник LAM является равнобедренным?

Маргарита Журавлева

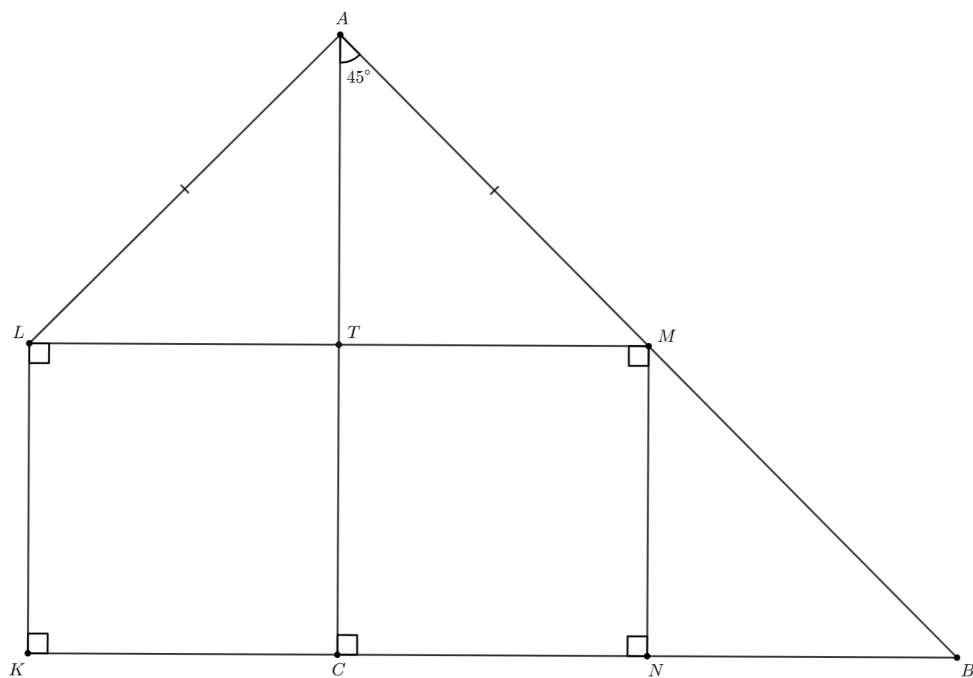
Решение. Заметим, что возможны три возможных случая равенства сторон при равнобедренности для треугольника AML , а именно:

- 1) $AM = ML$
- 2) $AM = AL$
- 3) $ML = AL$

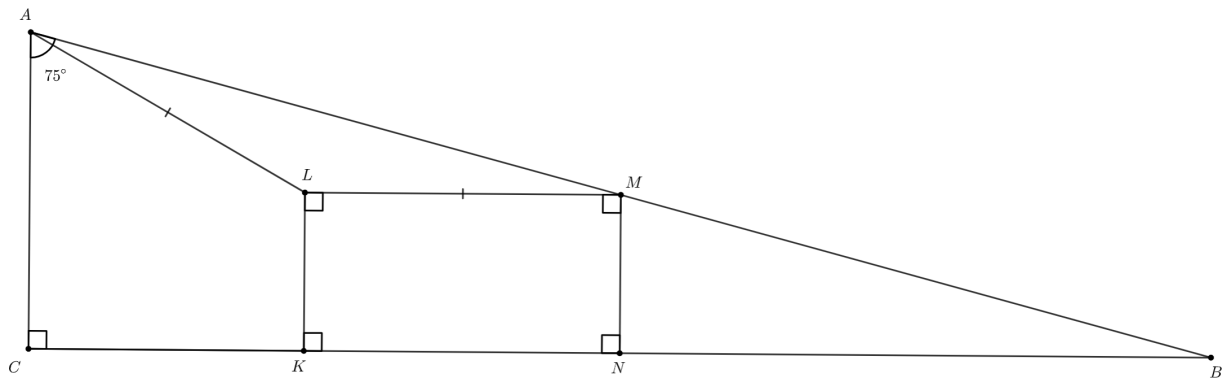
Разберем каждый случай:



1) Пусть $AM = MB = ML = 2x$, тогда $MN = x$ (из отношения сторон прямоугольника). Тогда так как MN —средняя линия, $AC = 2x$. Тогда в треугольнике ABC катет равен половине гипотенузы, значит искомый угол A треугольника ABC равен 60° .

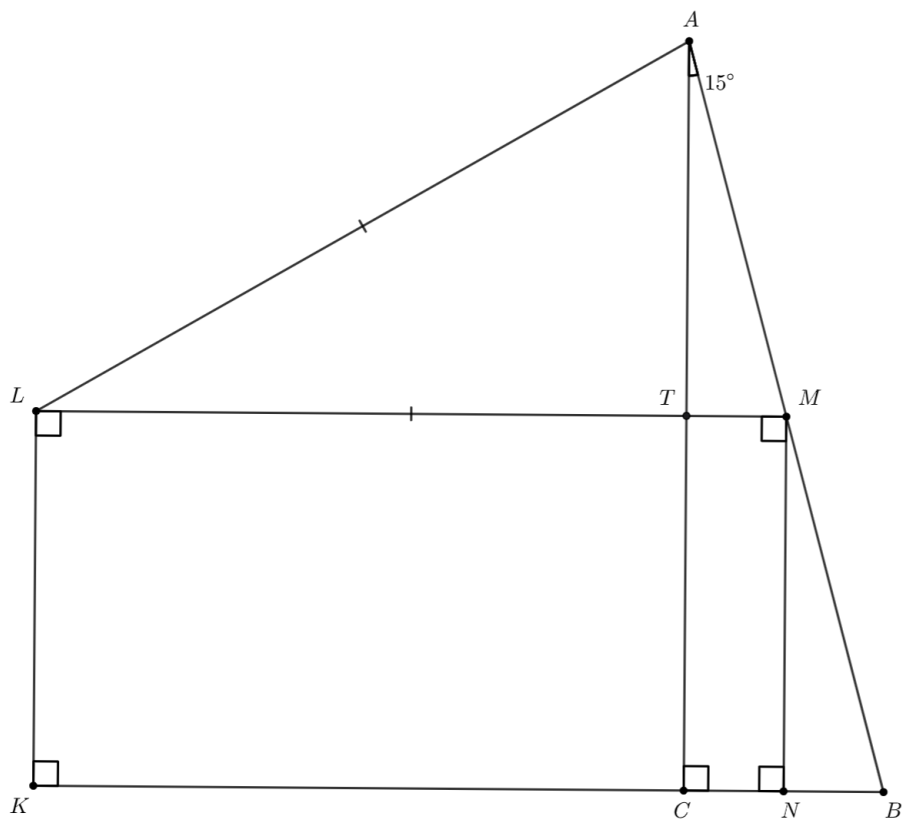


2) Пусть ML пересекает AC в точке T , тогда $MT = TL$, а значит т.к. $MN = TC = \frac{1}{2}AC$, то $AC = 2AT$ и $CB = 2CN = 2AT$, тогда изначальный треугольник равнобедренный, значит искомый угол A треугольника ABC равен 45° .



3) Рассмотрим два положения, при которых сторона полученного прямоугольника пересекает и не пересекает сторону AC исходного треугольника:

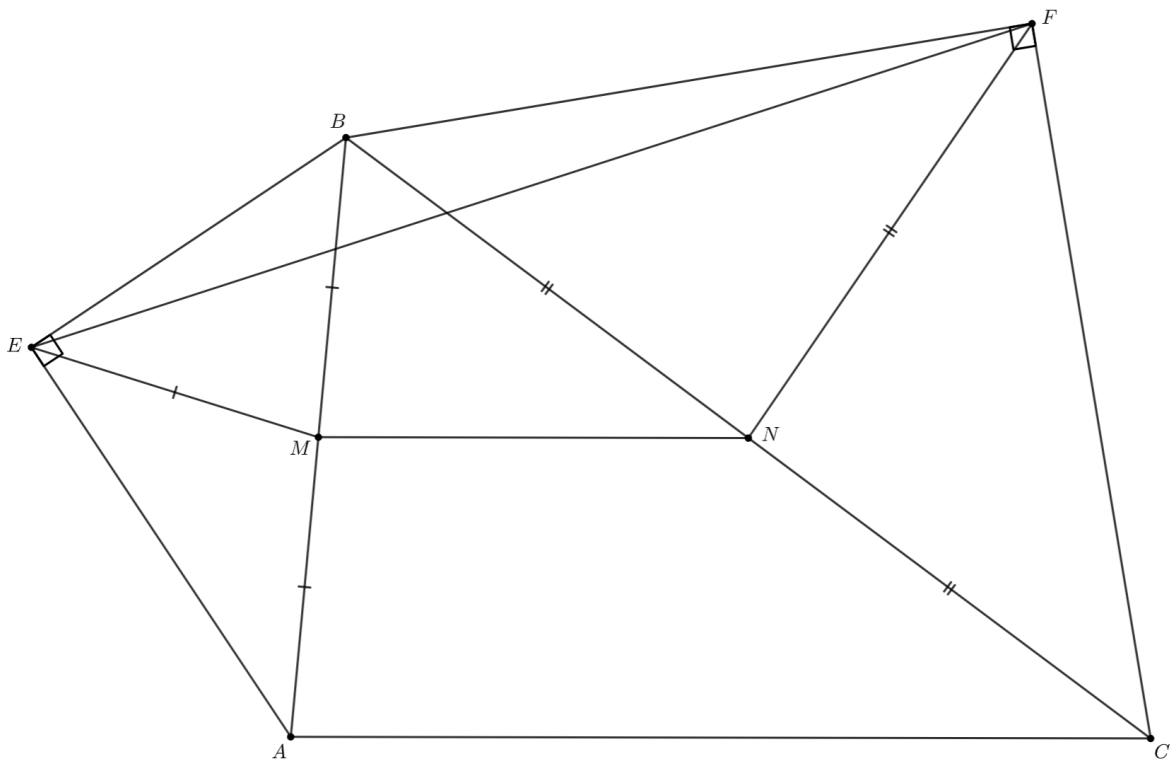
Пусть продолжение стороны ML за точку L пересекает AC в точке T , тогда $AT = TC = MN$ и $AL = 2MN = AC$, в треугольнике ALC высота LT является медианой, значит он равнобедренный с основанием AC , но он к тому же равнобедренный с основанием CL . Тогда треугольник ALC - равносторонний. Тогда $\angle ACL = \angle CAL = \angle CLK = 60^\circ$, значит $\angle ALM = 360^\circ - 60^\circ - 60^\circ - 90^\circ = 150^\circ$, $\angle LAM = 15^\circ$, значит искомый угол A треугольника ABC равен 75° .



Пусть ML пересекает AC в точке T , тогда $AT = TC = MN$ и $AL = 2MN = AC$, в треугольнике ALC высота LT является медианой, значит он равнобедренный с основанием AC , но он к тому же равнобедренный с основанием CL . Тогда треугольник ALC - равносторонний. Тогда $\angle LAC = 60^\circ$ и $\angle ALT = 30^\circ$, значит $\angle ALN + \angle LAN + \angle LNA = 360^\circ$, т.е. $2\angle CAB + 120^\circ + 30^\circ \angle CAB = 15^\circ$, значит искомым угол A треугольника ABC равен 15° .

3. Дан треугольник ABC . Точка E такова, что $\angle AEB = 90^\circ$, причём точки E и C лежат по разные стороны от прямой AB . Точка F такова, что $\angle BFC = 90^\circ$, причём F и A лежат по разные стороны от прямой BC . Докажите, что $EF < AB + BC$.

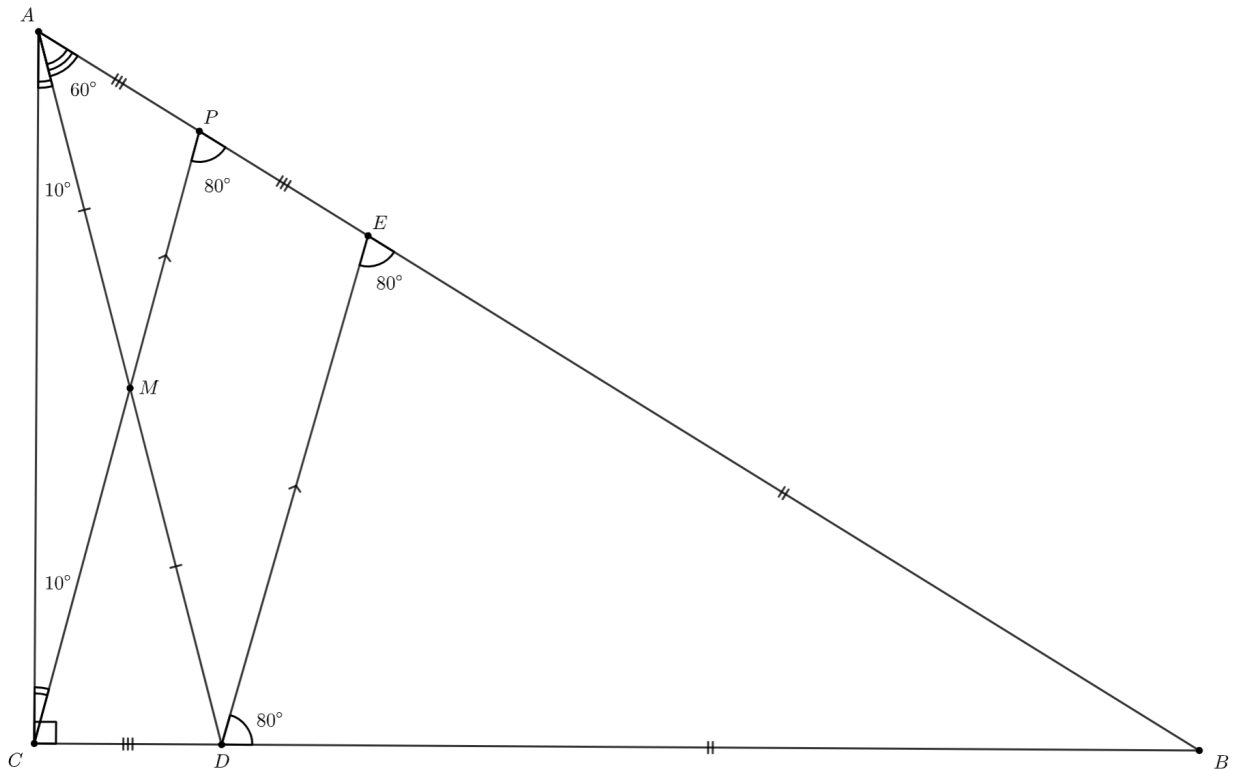
Максим Векшин



Решение. Отметим M и N — середины сторон AB и BC . Тогда в силу прямоугольности треугольников AEB и BFC : $EM = \frac{1}{2}AB$ и $NF = \frac{1}{2}BC$. По неравенству ломаной $EF \leq EM + MN + NF$, а $MN < \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}BC$ по неравенству треугольника. Откуда следует, что $EF < AB + BC$ (подставили неравенство на MN в неравенство $EF \leq EM + MN + NF$).

4. На катете BC прямоугольного треугольника ABC взята такая точка D , что гипотенуза AB на 1 длиннее отрезка BD . Найдите длину CD , если $\angle ABC = 20^\circ$, $\angle DAC = 10^\circ$.

Александр Бразженко

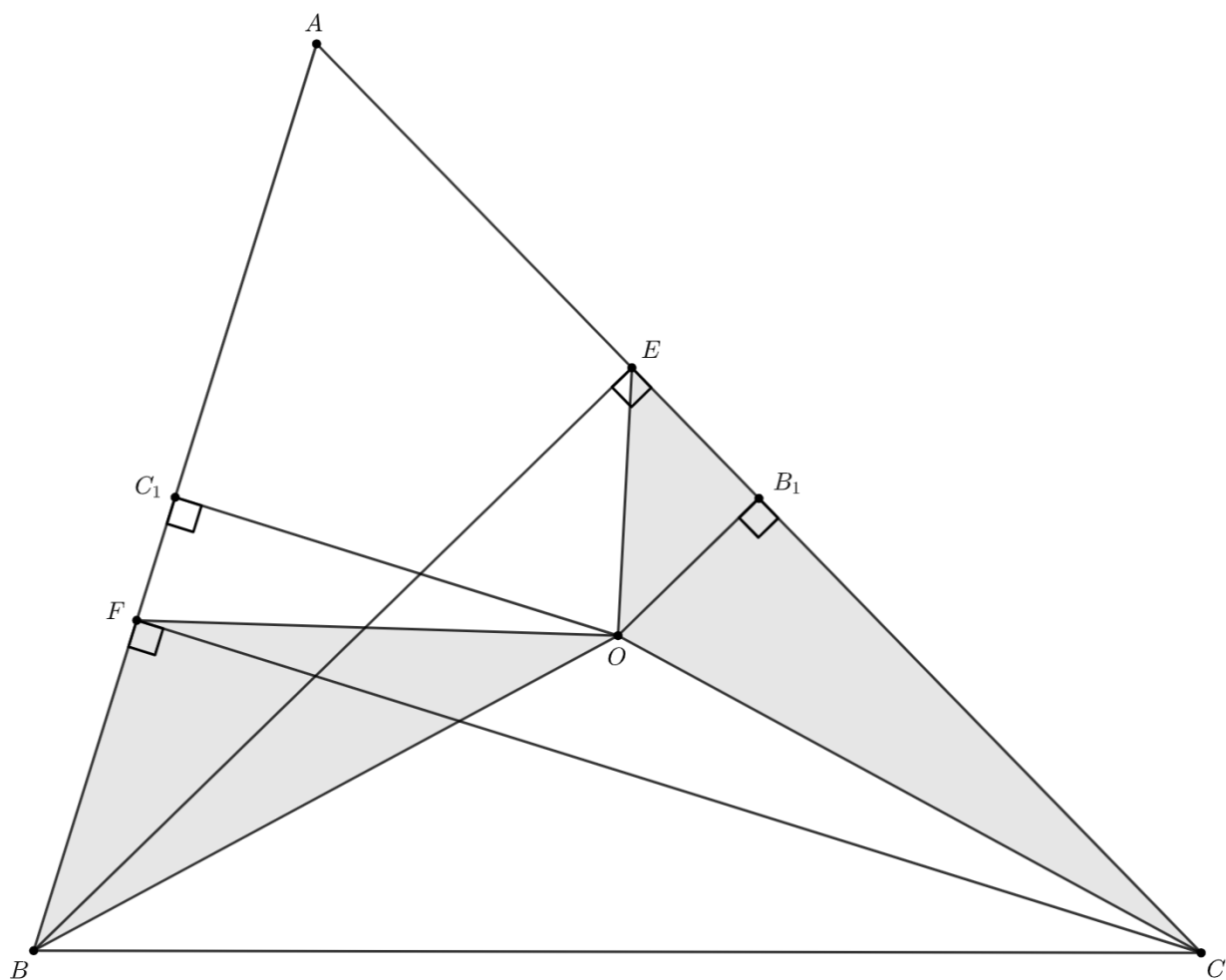


Решение. Отметим точку E на стороне AB такую, что $BE = BD$. Тогда $AE = 1$. Пусть точка M — середина отрезка AD , а прямая CM пересекает гипотенузу в точке P . Так как треугольник BDE равнобедренный, то $\angle BED = 80^\circ$. Треугольник CMA равнобедренный, так как CM — гипотенуза в прямоугольном треугольнике DCA , значит $\angle MCA = \angle MAC = 10^\circ$, $\angle CPB = 80^\circ$ как внешний в треугольнике CPA , то есть $\angle BED = \angle CPB$, а значит DE параллельна CP , откуда следует, что $EP = \frac{1}{2}$ (MP — средняя линия в треугольнике DEA). Заметим, что треугольники DBE и CBP равнобедренные, откуда $CD = BP - BE = EP = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$

5. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC , а E и F — основания его высот, проведённых из вершин B и C соответственно. Найдите отношение площадей треугольников BOF и COE .

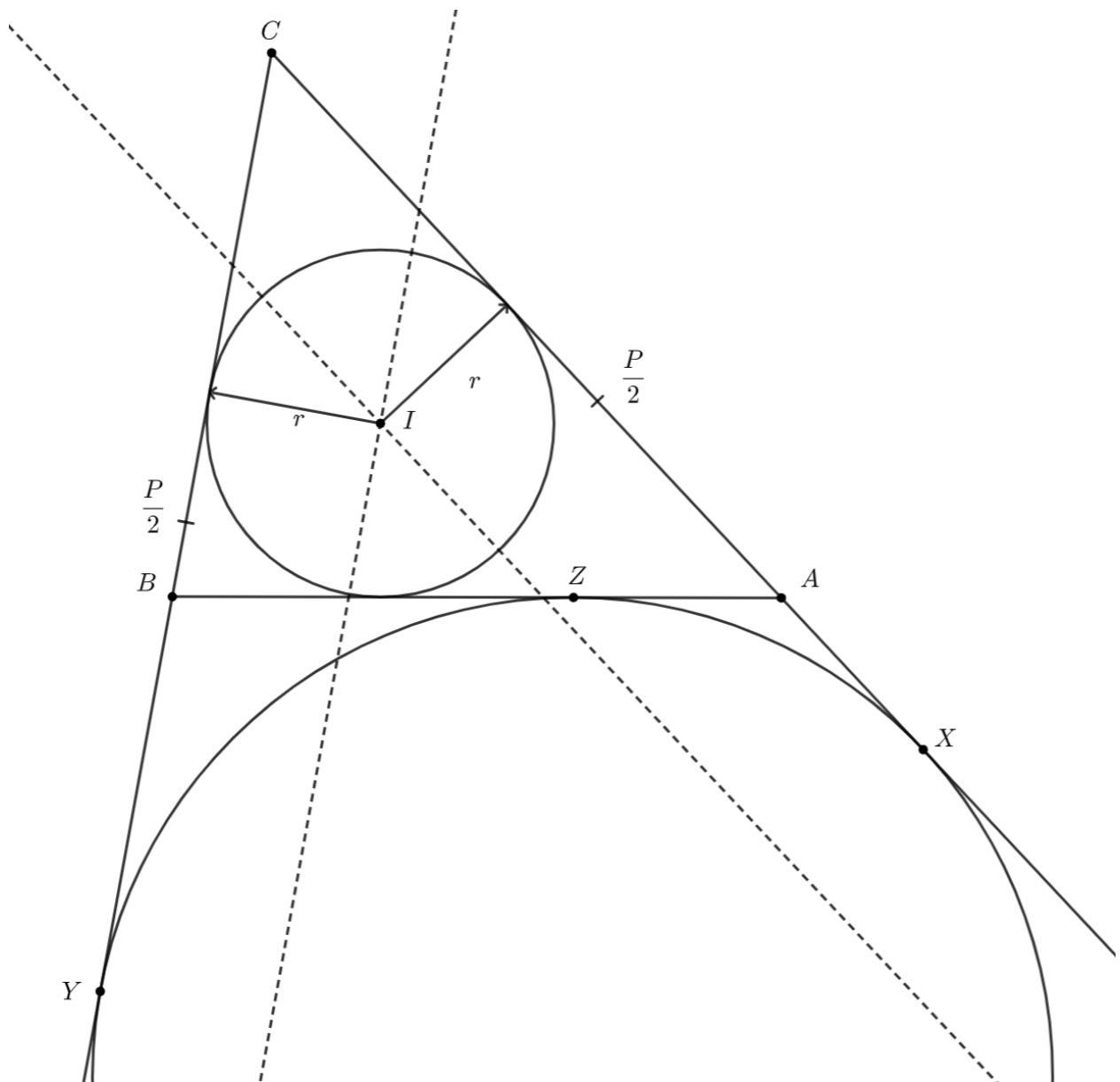
Маргарита Журавлева



Решение. Опустим перпендикуляры OB_1 и OC_1 из точки O на стороны CA и BA . Тогда удвоенные площади треугольников BOF и COE это $BF \cdot OC_1$ и $CE \cdot OB_1$. Заметим, что $\angle COB_1 = \angle CBA$. Значит, треугольники COB_1 и CBF подобны по двум углам (аналогичное можем понять про треугольники BOC_1 и BCE), а значит мы можем записать соотношение на их стороны, а именно: $\frac{BF}{OB_1} = \frac{CB}{CO} = \frac{CB}{OB} = \frac{CE}{OC_1}$, но тогда $BF \cdot OC_1 = CE \cdot OB_1$, что означает равенство искомых площадей.

6. На плоскости дан угол с вершиной C и два отрезка. Используя только циркуль и линейку без делений, постройте на сторонах угла такие точки A и B , что периметр и радиус вписанной окружности треугольника ABC были бы соответственно равны длинам данных отрезков.

Даниил Бужреев



Построение.

- 1) Впишем окружность данного радиуса в угол (её центр — пересечение двух прямых, удалённых от сторон угла на её радиус).
- 2) Впишем в угол окружность так, чтобы касательные к ней из вершины угла были равны половине периметра искомого треугольника (половине какого-то из данных отрезков).
- 3) Построим центр отрицательной гомотетии этих двух окружностей (проведя в них 2 параллельных диаметра и соединив их концы).
- 4) Проведём из центра гомотетии касательную к одной из окружностей (далее окружность ω) она будет касательной и для другой окружности. Сделать это можно, пересекая окружность ω с окружностью, построенной как на диаметре на отрезке OP , где O — центр окружности ω , P — центр гомотетии. Точки их пересечения и будут точками

касания, что несложно установить.

5) Точками пересечения касательной со сторонами угла и будут искомые точки A и B . Радиус вписанной окружности треугольника ABC по построению совпадет с данным, докажем, что периметр совпадет с данным:

Пусть вспомогательная окружность с пункта 2 касается сторон угла в точках X и Y (точка X лежит на одной прямой с точками A и C , а точка Y на одной прямой с точками B и C), а отрезка AB в точке Z . Тогда $AX = AZ$, $BY = BZ$, откуда $P_{ABC} = CX + CY$.