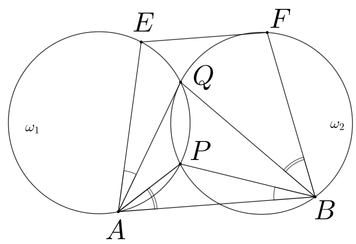
Устная олимпиада по геометрии
Лицей НИУ ВШЭ

27 октября 2024
9 класс

1. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC, в котором провели высоту AD. Прямая BO пересекает окружность, описанную вокруг треугольника ABD, в точке P. Докажите, что прямая DP проходит через середину отрезка AC.

2. На стороне AC треугольника ABC выбрана точка X. Затем её отразили относительно середины стороны AC и получили точку Y. Точка Z на описанной окружности треугольника ABC такова, что прямые BX и BZ симметричны относительно биссектрисы $\angle ABC$. Докажите, что значение угла $\angle CZY$ не зависит от выбора точки X.

3. Равные окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках P и Q (см. рис.). На ω_1 и ω_2 выбраны соответственно точки A и B. Точка E на ω_1 такова, что $\angle QAE = \angle PBA$. Точка F на ω_2 такова, что $\angle QBF = \angle PAB$. Докажите, что $EF \parallel AB$.



4. Окружность ω_1 касается стороны BC треугольника ABC в точке B и проходит через точку A, а окружность ω_2 касается стороны AB в точке B и проходит через точку C. Биссектриса угла ABC пересекает окружности ω_1 и ω_2 в точках X и Y соответственно. Окружности ω_1 и ω_2 вторично пересекаются в точке P. Докажите, что центр O описанной окружности треугольника ABC лежит на окружности, проходящей через точки X, P, Y.

Устная олимпиада по геометрии
Лицей НИУ ВШЭ

27 октября 2024
9 класс

5. На сторонах AC и AB остроугольного треугольника ABC выбраны соответственно точки X и Y так, что $BA = BX$ и $CA = CY$. Прямые BX и CY пересекаются в точке P. Точка Z такова. что $\angle ZBC = \angle ZCB = \angle BAC$, причём точки A и Z лежат по одну сторону от прямой BC. Докажите, что точки A, P, Z лежат на одной прямой.

6. Вписанная окружность треугольника ABC касается его сторон BC, CA, AB соответственно в точках D, E, F. На прямых DE и DF взяты соответственно точки B_1 и C_1 таким образом, что $BB_1 = DB_1$ и $CC_1 = DC_1$. Прямая AD вторично пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке X. Найдите радиус описанной окружности треугольника B_1XC_1, если $II_a = 1$, где I — центр вписанной окружности, а I_a — центр A-вневписанной окружности треугольника ABC.