Правила отбора

Задачи для отбора поделены на три блока: легкие, средние и трудные. Изначально каждому выдаются по две легкие задачки (на выбор принимающих экзамен) на разные темы. Задачи сдаются **письменно**, но при наличии вопросов по написанному решению возможно устное обсуждение.

По каждой задаче есть три попытки сдать решение. На решение легких задач отводится по 20 минут на каждую (так, на решение первых двух задач отводится 40 минут), средних — 30 минут, трудных — по 40 минут. Когда задача сдана либо закончились отведенное на нее время или попытки, выдается следующая задача. Таким образом, на руках у испытуемого всегда 2 задачи. Если задача была решена верно, то выдается задача следующего уровня сложности (кроме случая, когда решена задача высшего уровня сложности, тогда выдается такая же). Если же верного решения так и не поступило, то выдается задача того же уровня сложности. В обоих случаях желательно, чтобы выдавалась задача другой тематики.

Всего на вступительные экзамены одной волны отводятся 2 часа, поэтому по истечении 2 часов экзамен в любом случае прекращается и оцениваются результаты, достигнутые к этому моменту. Экзамен может закончиться раньше, если уже достигнута оценка в 10 баллов или не решены по крайней мере 3 задачи (то есть получены 3 новые задачи вместо нерешенных).

Критерии оценивания. Для получения максимально возможных 10 баллов достаточно решить 5 задач. 8 баллов даются за решение 4 задач. 6 баллов даются за решение 3 задач. 4 балла даются за решение 2 задач, и 2 балла — за решение одной задачи. Промежуточные баллы могут быть выставлены, если решены более сложные задачи (например, вместо двух легких задач решены легкая и средняя); также могут быть оценены существенные продвижения в нерешенных задачах. Две нерешенные задачи понижают оценку на 1 балл.

Задачи и решения

Лёгкие задачи

Л1. Есть коробка с красными, синими, белыми и зелеными шариками. Известно, что красных шариков в 4 раза меньше, чем синих, белых и зеленых вместе взятых. Кроме того, синих шариков в 6 раз меньше, чем красных, белых и зеленых шариков вместе взятых. Докажите, что общее количество шариков делится на 35.

Л2. Сравните числа $(20^2)!$ и $(20!)^2$. (Напомним, что $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.)

Л3. В ряд стоит 50 человек, все разного роста. Ровно 15 из них выше своего левого соседа. Сколько человек выше своего правого соседа? Приведите все варианты и докажите, что других нет.

Л4. Из четырех палочек получилось составить выпуклый четырехугольник с перпендикулярными диагоналями. Докажите, что из тех же палочек можно составить четырехугольник, два противоположных угла которого будут равны по 90°.

Средние задачи

С11. Петя поделил с остатком натуральное число на сумму его цифр. И неполное частное, и остаток оказались у Пети равны 2017. Учительница поставила Пете двойку. Докажите, что учительница права.

С12. В треугольнике ABC проведена биссектриса AL. На стороне AB нашлась точка K такая, что $\angle ACK = \angle ABC$, $\angle CLK = \angle BKC$. Докажите, что $AC = KB$.

С13. Миша выписал все слова (не обязательно осмысленные), которые получаются вычеркиванием ровно двух букв из слова «ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИК» (буквы Е и Ё разные), а Коля сделал то же самое со словом «АВТОМОБИЛИЗАЦИЯ». У кого получилось больше слов?

Ответ. У Миши. **Решение.** В обоих словах по 15 букв, но у Миши все буквы разные. Поэтому все слова, получающиеся вычеркиванием двух букв, тоже разные. А у Коли при вычеркивании букв ИЛ и букв ЛИ получается одно и то же слово АВТОМОБИЗАЦИЯ.

С14. Школьник в течение учебного года (который длится не менее 100 дней) ежедневно получал одну оценку: 3, 4 или 5. Ни в какой из дней сумма его оценок (т. е. сумма всех оценок, которые он получил от начала года и до текущего дня) не делилась на 3. Докажите, что за год среди всех его оценок было не больше 60% четверок.

Решение. Если сумма оценок школьника не делится на 3, то следующие две оценки не могут быть четверками. Действительно, если сумма дает остаток 1 при делении на 3, то получение двух четверок увеличит ее на 8 и результат будет делиться на 3. Если же сумма дает остаток 2 при делении на 3, то прибавление к ней 4 сразу даст число, делящееся на 3.

Таким образом, среди оценок, полученных школьником, нет двух четверок подряд (кроме самых первых оценок — первые две оценки как раз могут быть четверками; проведенное нами рассуждение не может быть использовано для первого дня учебного года, когда никаких оценок еще нет и поэтому их сумма равна 0, т. е. делится на 3). Поэтому четверки составляют не более половины (более точно — не более половины всех оценок плюс 1). Так как учебный год весьма продолжителен, количество четверок не может быть равно 60 %.

С15. На плоскости проведено 102 прямых и отмечены все точки их пересечения. Может ли на какой-нибудь окружности оказаться ровно 105 отмеченных точек?

Ответ. Не может.

Решение. Пусть на какой-либо окружности ω лежит N точек пересечения. Тогда каждая прямая пересекает ω не более чем в двух точках. При этом каждую отмеченную точку мы считаем по крайней мере 2 раза, так как через нее проходят две (а может быть и больше) прямые. И из этого следует, что $N \leqslant 102$.

Итак, ни на какой окружности не может быть больше 102 точек пересечения. Для полноты картины отметим, что если проведенные прямые суть стороны 102-угольника, вписанного в окружность ω, то $N = 102$.

C16. Таблица 4×4 заполнена числами. Петя переставил её столбцы так, что никакой столбец не остался на месте. В получившейся таблице Вася переставил строки так, что никакая строка не осталась на месте. В итоге получилась исходная таблица. Каково наибольшее возможное количество различных чисел в ней?

C17. На диагонали BD выпуклого четырехугольника $ABCD$ отмечена точка E. Известно, что $AB = CE$, $\angle ABD = \angle BCE = \angle ECD$ и $\angle DAB = \angle ABC$. Докажите, что треугольник BCD равнобедренный.

Трудные задачи

T21. Есть коробка с красными, синими, белыми и зелеными шариками. Известно, что красных шариков в 4 раза меньше, чем синих, белых и зеленых вместе взятых. Кроме того, синих шариков в 6 раз меньше, чем красных, белых и зеленых шариков вместе взятых. Докажите, что общее количество шариков делится на 35.

T22. Сравните числа $(20^2)!$ и $(20!)^2$. (Напомним, что $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.)

T23. 40 членов жюри подбирают сложную задачу для 9 класса. У них есть список из 30 задач. Они договорились поставить дать школьнику задачу, которую умеют решать не менее половины членов жюри, но не все. Каждый из членов жюри решил ровно 26 задач, причем любые два члена жюри решили разные наборы задач. Докажите, что они смогут найти подходящую задачу.

T24. На клетчатом поле располагаются 10 клетчатых прямоугольников площади 1, 2, 3, ..., 10. Оказалось, что нашлась клетка, покрытая один раз, две клетки, покрытые два раза, три клетки, покрытые три раза и четыре клетки, покрытые четыре раза. Какое наибольшее количество клеток, покрытых хотя бы 5 раз, могло найтись?

Ответ. 5 клеток. **Решение.** *Оценка.* Всего покрыто $1+2+\ldots+10 = 55$ клеток. 10 клеток, описанных в условии покрыты, $1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 30$ раз. Остается еще $55 - 30 = 25$ покрытий клеток. Значит, клеток, покрытых хотя бы 5 раз, не более 5.

Пример. Будем считать, что все прямоугольники имеют вид $1 \times n$. Сложим прямоугольники площади 15=3+4+8, 14=1+6+7, 12=2+10. Еще остались прямоугольники площади 5 и 9. Наложим прямоугольники друг на друга так, чтобы у них совпадали левые клетки. Нетрудно проверить, что пример подходит.

T25. К двузначному числу приписали справа еще одно двузначное число. Оказалось, что полученное четырехзначное число делится на произведение исходных двузначных чисел. Какое четырехзначное число могло получиться?

Ответ. 1352 и 1734. **Решение.** Обозначим исходные двузначные числа через x и y, причем y приписывается к x справа. Тогда $100x + y$ должно делиться на xy. Так как $100x$ делится на x, то и y должно делиться на x. Обозначим тогда $y = kx$. Так как x — двузначное число, то $1 \leqslant k \leqslant 9$. Подставим в условие делимости $y = kx$: $100x + kx$ делится на kx^2, то есть $100 + k$ делится на kx. Так как второе слагаемое делится на k, то и 100 должно делиться на k. Поэтому $k = 1$, $k = 2$, $k = 4$ или $k = 5$, учитывая, что k однозначное.

При $k = 1$ получаем, что 101 делится на x, чего не может быть при двузначном x.

При $k = 2$ получаем 102 делится на $2x$, или 51 делится на x. Тогда $x = 17$ или $x = 51$. Но $x = 51$ не подходит, так как тогда $y = 102$.

При $k = 4$ получаем 104 делится на $4x$, или 26 делится на x. Значит, $x = 13$ или $x = 26$. Последнее невозможно, так как в этом случае $y = 104$.

При $k = 5$ получаем 105 делится на $5x$, или 21 делится на x. Значит, $x = 21$, чего не может быть, так как тогда $y = 105$.

Итак, подошли только $x = 17$ и $x = 13$. В первом случае $y = 34$, во втором $y = 52$. Значит, возможные четырехзначные числа — это 1734 и 1352.

T26. 100 школьников писали три теста: по математике, русскому и биологии. Каждый тест можно либо сдать, либо провалить. Только 26 человек успешно сдали тест по математике. Кроме того, 60 школьников провалили более одного теста. Наконец, 83 школьника провалили ровно один из тестов по русскому и по биологии, но ни один школьник из 100 не провалил оба этих теста. Сколько школьников справились со всеми тремя тестами?

Ответ. 3 школьника. **Решение.** Заметим, что 26 человек, сдавших тест по математике, также сдали хотя бы один из тестов по биологии и русскому, значит, провалили не более одного теста. Кроме того, так как 83 школьника провалили ровно один из тестов по русскому и по биологии, но ни один школьник из 100 не провалил оба этих теста, то остальные 17 сдали и русский, и биологию, то есть тоже провалили не более одного теста.

Остальные школьники, то есть не сдавшие математику и сдавшие ровно один из тестов по русскому и биологии, провалили более одного теста, поэтому 26 школьников, сдавших математику, и 17 школьников, сдавших русский и биологию, — все школьники, провалившие не более одного теста. Таких по условию ровно $100 - 60 = 40$. Если бы эти 17 и предыдущие 26 школьников были различны, то получилось бы всего 43 школьника, проваливших не более одного теста. Значит, ровно трое из 17 и 26 школьников совпадают, и только эти трое успешно сдали все три теста.

T27. Натуральные числа x, y и z таковы, что $xy < z^2$ и $2x + 3z < 5y$. Что больше: x^5 или y^3z^2?

Ответ. $y^3z^2 > x^5$. **Решение.** Докажем, что $y > x$. Допустим противное, тогда $x = y + t$, $t \geqslant 0$. Поэтому $xy = (y+t)y = y^2+ty < z^2$, откуда $z > y$. Следовательно, $2x+3z = 2y+2t+3z > 5y+2t > 5y$, что противоречит условию. Итак, $y > x$, т. е. $y = x + t$, $t \geqslant 0$. Тогда $xy = x^2 + tx < z^2$, откуда $z > x$. Итак, $z > x$ и $y > x$, поэтому $y^3z^2 > x^5$.

T28. Внутри треугольника ABC отмечена точка D так, что $AD = DC$. Прямая BD пересекает сторону AC в точке E. Оказалось, что $\dfrac{BD}{BE} = \dfrac{AE}{EC}$. Докажите, что $BE = BC$.

Решение. Отметим на отрезке AC такую точку F, что $AE = CF$. Тогда равенство из условия задачи можно записать в виде

$$BD : BE = CF : CE\,,$$

откуда $DF \parallel BC$ и треугольники FDE и CBE подобны. Но треугольники ADE и CDF равны, значит, $DE = DF$, значит, треугольник FDE равнобедренный, а вмести с ним и треугольник CBE равнобедренный.