Правила отбора

Это примерные правила приема задач и оценивания, на которые можно ориентироваться.

Задачи для отбора поделены на три блока: простые, средние и сложные. Изначально каждому дается по одной две простые задачки на выбор принимающих на разные темы. Задачи сдаются в основном **письменно**, но при наличии вопросов по написанному решению возможно устное обсуждение.

По каждой задаче есть три попытки сдать решение. На решение простых задач отводится по 20 минут на каждую (так, на решение первых двух задач отводится 40 минут), средних — 30 минут, сложных — до 40 минут. Когда задача сдана либо закончились отведенное на нее время или попытки, выдается следующая задача. Если задача была решена верно, то выдается задача следующего уровня сложности. Если же верного решения так и не поступило, то выдается задача того же уровня сложности, но желательно другой тематики.

Всего на вступительные экзамены одной волны отводятся 2 часа, поэтому после истечения 2 часов экзамен в любом случае прекращается и оцениваются результаты, достигнутые к этому моменту. Экзамен может закончиться раньше, если уже достигнута оценка в 10 баллов или не решены по крайней мере 4 задачи (то есть получены 4 новые задачи вместо нерешенных).

Критерии оценивания. Для получения максимально возможных 10 баллов достаточно решить 5 задач, из которых хотя бы одна сложная. 8 баллов даются за решение 4 задач, из которых хотя бы две средние. 6 баллов даются за решение 3 задач, из которых хотя бы одна средняя. 4 балла даются за решение 2 задач, и 2 балла — за решение одной задачи. Промежуточные баллы могут быть выставлены, если решенных задач больше, но они не удовлетворяют критериям сложности, также могут быть оценены существенные продвижения в нерешенных задачах.

Задачи и решения

1. На окружности имеются синие и красные точки. Разрешается добавить или убрать красную точку и поменять цвета ее соседей. Менее двух точек оставлять не разрешается. Пусть первоначально были две точки: одна красная и одна синяя точки. Можно ли через 100 операций получить ровно 50 красных точек?

Ответ. Нет, нельзя. **Решение.** Заметим, что каждым ходом количество красных точек изменяется на нечетное количество. Поэтому спустя 100 операций количество красных точек не изменит четности. С другой стороны, это количество из 1 должно стать равным 50, значит, это невозможно.

2. Костя написал два числа, не содержащих в записи нулей, и заменил цифры буквами (разные цифры — разными буквами). Оказалось, что число КРОКОДИЛЛЛ делится на 312. Докажите, что число ГОРИЛЛА не делится на 392.

Решение. Так как 312 делится на 8, то и КРОКОДИЛЛЛ делится на 8. При это, по признаку делимости на 8, ЛЛЛ должно делиться на 8. Другими словами, Л $\cdot$ 111 делится на 8. 111 и 8 взаимно просты, поэтому Л делится на 8, и так как числа не содержат нулевых цифр, Л $=8$.

Далее, число 392 также делится на 8, значит, если ГОРИЛЛА не делится на 8, то она не делится и на 392. ГОРИЛЛА оканчивается на ЛЛА, и, как мы выяснили ранее, Л $=8$, то есть 88А должно делиться на 8. Но 880 делится на 8, значит, А должно делиться на 8. Так как слова нулевых цифр не содержат, то А $=8$, что невозможно, так как тогда Л $=$ А, а по условию разные цифры заменили разными буквами.

3. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, в котором $AD+BC=CD$. Биссектрисы углов $\angle BCD$ и $\angle CDA$ пересекаются в точке S. Докажите, что $AS=BS$.

Решение. Отметим на отрезке CD точку P такую, что $CP=CB$. Тогда, в силу равенства $AD+BC=CD$, $DP=DA$. Треугольники BCS и PCS равны по двум сторонам $CB=CP$ (по построению) и общей стороне CS и углу между ними ($\angle BCS=\angle PCS$, так как CS — биссектриса угла DCB). Аналогично равны треугольники PDS и ADS. В равных треугольниках соответсвующие элементы равны, поэтому $AS=PS=BS$, то есть $AS=BS$, что и требовалось доказать.

4. Прямоугольник 2002×100 (сторона длины 2002 расположена горизонтально) разбит на доминошки 1×2 и Z-тетрамино. Доминошек не более 600. Докажите, что горизонтальных Z-тетрамино больше 800.

Решение. Рассмотрим две верхние и две нижние строки. Занумеруем их числами 1, 2, 99 и 100. Обозначим суммарное количество вертикальных Z-тетрамино, находящихся хотя бы одной клеткой в этих строках, через k.

Количество клеток, покрытых этими k вертикальными Z-тетрамино в строках 2 и 99 хотя бы на k больше, чем в строках 1 и 100. При этом горизонтальные Z-тетрамино покрывают в строках 2 и 99 не меньше клеток, чем в 1 и 100. Поэтому уравнять количество покрытых клеток в крайних строках и строках 2 и 99 можно только за счет доминошек. Поэтому доминошки покрывают в сумме хотя бы k клеток в строках 1 и 100. Отсюда $k\leqslant 1200$.

Всего клеток в первой и последней строках в сумме 4004. Из них как максимум 1200 покрыты вертикальными Z-тетрамино и еще 1200 доминошками. Остальные $4004-2400=1604$ клетки покрыты горизонтальными Z-тетрамино, и одна фигурка покрывает не более двух клеток. Значит, горизонтальных Z-тетрамино не меньше $1604:2=802>800$.

5. Будем называть *n-цепочкой* число, которое можно получить из чисел от 1 до n, написав их друг за другом в некотором порядке без пробелов. Например, возможный вариант 11-цепочки: 3764581121910. Для какого наименьшего $n>1$ существует n-цепочка, являющаяся палиндромом? Напомним, что палиндром — это число, читающееся одинаково слева направо и справа налево, например, 12321. Палиндром не может начинаться с нуля.

Ответ. $n=19$. **Решение.** Пример 19-цепочки палиндрома: 9 | 18 | 7 | 16 | 5 | 14 | 3 | 12 | 1 | 10 | 11 | 2 | 13 | 4 | 15 | 6 | 17 | 8 | 19. Докажем, что 19 — наименьшее возможное значение n. Для начала заметим, что в данной цепочке только одна цифра может встречаться нечетное число раз (эта цифра должна быть посередине). Очевидно, что для $n\leqslant 9$ цепочки палиндрома не существует, так как цифры 1 и 2 будут встречаться в цепочке по одному разу. Для $10 \leqslant n \leqslant 18$ цифры 0 и 9 встречаются по одному разу. Поэтому n-цепочки палиндрома при $10 \leqslant n \leqslant 18$ не существует.

6. В каждой клетке таблицы 4×4 записано целое число. Может ли так оказаться, что все 8 сумм по строкам и по столбцам будут различными степенями двойки?

Ответ. Нет, не может. **Решение.** Заметим, что сумма по строкам и сумма по столбцам — это сумма всех чисел в таблице, значит, они равны. Предположим противное и рассмотрим максимальную из сумм по линиям в таблице. Пусть она равна 2^k. Не умаляя общности можно считать, что это сумма в некоторой горизонтали.

Рассмотрим вертикали по убыванию суммы. Сумма в вертикали с самой большой суммой не превосходит 2^{k-1}. Сумма в следующей вертикали не превосходит 2^{k-2}, в третьей — 2^{k-3}, и, наконец, в последней — 2^{k-4}. Тогда сумма по вертикалям не превосходит $2^{k-1}+2^{k-2}+2^{k-3}+2^{k-4}$, что меньше, чем 2^k, то есть меньше суммы даже в одной строке.

7. Каждую грань кубика разбили на четыре одинаковых квадрата, а затем раскрасили эти квадраты в несколько цветов так, что квадраты, имеющие общую сторону, оказались окрашенными в различные цвета. Какое наибольшее количество квадратов одного цвета могло получиться?

Ответ. 8. **Решение.** Посмотрим на вершины кубика. В вершине кубика сходятся 3 квадрата, и никакие 2 из них не могут быть одного цвета. Следовательно, квадратов одного цвета не может быть больше 8. *Пример* на 8 получается, если раскрасить 4 грани, кроме каких-то двух противоположных, в шахматном порядке в черный и белый цвета, а оставшиеся 8 клеток на двух противоположных гранях раскрасить еще в 8 различных цветов, по одной клетке каждого цвета. Тогда восемь черных клеток не будут иметь общих сторон.

8. Прямоугольник с целыми длинами сторон разбит на двенадцать квадратов со следующими длинами сторон: 2, 2, 3, 3, 5, 5, 7, 7, 8, 8, 9, 9. Каков периметр прямоугольника?

Ответ. 90. **Решение.** Найдем площадь прямоугольника $S = 2^2+2^2+3^2+3^2+5^2+5^2+7^2+7^2+ +8^2+8^2+9^2+9^2 = 464 = 2^4 \cdot 29$. Обе стороны прямоугольника должны быть не меньше 9, так как присутствует квадрат со стороной 9. Тогда единственный вариант разложения числа 464 на 2 множителя: $464 = 16 \cdot 29$. Периметр прямоугольника в это случае будет равен 90.

9. Коля родился в прошлом веке. Мы знаем, что в 1999 году ему исполнилось столько лет, какова сумма цифр года, когда он родился. Какой год рождения у Коли?

Ответ. 1976. **Решение.** Если Коля родился в прошлом веке, то год его рождения имеет вид $\overline{19xy}$. В 1999 году ему исполнилось $99 - \overline{xy}$ лет, и по условию такова сумма цифр в год рождения. Имеем равенство $99 - 10x - y = 1 + 9 + x + y$, или $89 = 11x + 2y$. Так как x и y — цифры, у этого уравнения есть лишь одно решение — это $x = 7$, $y = 6$.

10. Рассмотрим прямоугольник из 2 строк и 2019 столбцов. Нужно закрасить каждую клетку в один из трех цветов так, чтобы соседние по стороне клетки были разных цветов. Сколько существует различных раскрасок?

Ответ. $6 \cdot 3^{2018}$. **Решение.** Посмотрим на самый левый столбец. Покрасить две его клетки можно $3 \cdot 2 = 6$ способами. Пусть левый столбец покрашен в цвета (a, b), тогда для второго столбца есть 3 варианта раскраски — $(c, a), (b, a), (b, c)$. При этом, для каждого следующего столбца также имеется 3 варианта на уже имеющуюся раскраску текущего столбца, значит, для каждого столбца, кроме первого, есть 3 способа его покраски, итого $6 \cdot 3^{2018}$ способов.

11. В трапеции $ABCD$ точки M и N являются серединами оснований AB и CD соответственно. Точка P принадлежит отрезку MN. Докажите, что площади треугольников ADP и BCP равны.

Решение. Площадь трапеции равна полусумме оснований, умноженной на высоту. Поэтому MN делит трапецию $ABCD$ на две равновеликие, ведь высота в трапециях $AMND$ и $BMNC$ одинаковая, и полусуммы оснований равны.

Кроме того, в треугольнике APB отрезок PM — медиана, значит, площади треугольников AMP и BMP равны. Аналогично равны площади треугольников PDN и PCN. Вычитая из равных площадей $AMND$ и $BMNC$ равные площади AMP и BMP, а также PDN и PCN, получаем два треугольника APD и BPC равной площади.

12. Точка D лежит на дуге BC описанной окружности равностороннего треугольника ABC, не содержащей точки A. Точка E симметрична B относительно прямой CD. Докажите, что точки A, D и E лежат на одной прямой.

Решение. $\angle ADB = \angle ADC = 60^\circ$, так как они опираются на стороны равностороннего треугольника. Тогда $\angle BDC = 120^\circ$, как и симметричный ему $\angle EDC$. Получилось, что $\angle ADC + \angle CDE = 180^\circ$, значит, точки A, D и E действительно лежат на одной прямой.

13. Вещественные числа a, b, c, d удовлетворяют условиям $a + b = c + d \neq 0$ и $ac = bd$. Докажите, что $a = d$.

Решение. Проведем несколько преобразований. В условии $a + b = c + d$ перенесем c и b в другие части, получим $a - c = d - b$. Перемножим это равенство и предыдущее крест-накрест, получим

$$ad + bd - ab - b^2 = ac + ad - c^2 - cd.$$

Так как $ac = bd$ и $ad = ad$, то

$$-ab - b^2 = -c^2 - cd, \quad b(a + b) = c(c + d).$$

Учитывая, что $a + b = c + d \neq 0$, имеем $b = c$, или, из первого условия, $a = d$, что и требовалось доказать.

14. Докажите, что если диагонали трапеции перпендикулярны, то сумма длин ее оснований не превосходит сумму длин боковых сторон.

Решение. Назовем трапецию $ABCD$, где AD и BC — основания, причем $BC < AD$. Точку пересечения диагоналей AC и BD обозначим через P. Отразим точки B и C относительно P. Полученные точки B' и C' будут лежать на отрезках PD и PA, так как основание $BC < AD$. Кроме того, в силу симметрии $B'C' = BC$.

При этом из условия перпендикулярности диагоналей следует, что $AB = AB'$, $CD = C'D$. Точку пересечения отрезков AB' и DC' обозначим через T. По неравенству треугольника, $AT + TD \geqslant AD$ и $TB' + TC' \geqslant B'C'$. Сложим полученные неравенства: $AB + CD = AB' + C'D = AT + TD + TB' + TC' \geqslant$ $\geqslant AD + B'C' = AD + BC$, или $AB + CD \geqslant AD + BC$, что и требовалось доказать.

15. В треугольнике ABC точка D — середина стороны AB, а точка E — середина отрезка CD. Докажите, что если $\angle CAE = \angle BCD$, то $AC = CD$.

Решение. Проведем $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$. Тогда $DBPC$ — параллелограмм, $\angle PBC =$ $= \angle BCD$. Четырехугольник $ADPC$ — также параллелограмм, а значит E —середина диагонали DC — лежит на отрезке AP. Поэтому $\angle BCD = \angle PAC$.

Четырехугольник $ABPC$ — трапеция по построению, при этом по вышедоказанному $\angle PAC =$ $= \angle PBC$, поэтому эта трапеция — вписанная, а значит равнобокая, $BP = AC$. Из параллелограмма $DBPC$ имеем $BP = CD$, поэтому $AC = CD$, что и требовалось.

16. Даны два натуральных числа a и b. Докажите, что хотя бы одно из чисел a, b и $a + b$ можно представить в виде разности двух квадратов целых чисел.

Решение. Рассмотрим два соседних числа n и $n+1$. Разность их квадратов равна $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$, то есть любому натуральному нечетному числу. Поэтому, если среди чисел a и b есть нечетное, то его можно представить в виде разности двух квадратов целых чисел.

Если же оба числа четны, то одно из чисел a, b и $a + b$ делится на 4. Тогда рассмотрим разность $(n + 2)^2 - n^2 = 4n + 4$. Она может быть равна в зависимости от n любому числу, делящемуся на 4. Поэтому в этом случае также утверждение выполняется.

17. Про вещественные числа a, b, c, d известно, что $a + b = cd$ и $c + d = ab$. Докажите, что

$$(a + 1)(b + 1)(c + 1)(d + 1) \geqslant 0.$$

Решение. Преобразуем выражение

$$(a + 1)(b + 1)(c + 1)(d + 1) = (ab + a + b + 1)(cd + c + d + 1) =$$

$$= (ab + cd + 1)(cd + ab + 1) = (ab + cd + 1)^2 \geqslant 0.$$

18. В каждом поле квадратной таблицы 9×9 написано натуральное число. Затем мы подсчитали суммы чисел, расположенных в каждой строке и в каждом столбце. Может ли случиться так, что 18 полученных сумм — последовательные натуральные числа?

Ответ. Нет, не может. **Решение.** Представим 18 последовательных чисел как $a - 8, a - 7, \ldots, a + 9$. Тогда их сумма равна $18a + 9$. С другой стороны, это удвоенная сумма чисел в таблице, и оказалось, что она нечетна. Противоречие.

19. Существует ли у уравнения $x(y - z) + y(z - x) = 6$ решение в целых числах, в котором все три числа больше 1000?

Ответ. Нет, не существует. **Решение.** Раскроем скобки в выражении

$$x(y - z) + y(z - x) = xy - xz + yz - xy = yz - xz = z(y - x) = 6.$$

Тогда число 6 должно должно делиться на z, откуда z не может быть больше 1000.

20. Вова придумал положительную несократимую дробь, у которой сумма числителя и знаменателя равна 2017. Он вычел из числителя 1 и сократил полученную дробь. Получилось $\dfrac{3}{5}$. Какую дробь придумал Вова? Найдите все возможные варианты ответа и объясните, почему других быть не может.

Решение. Обозначим числитель исходной дроби через x, тогда знаменатель равен $2017 - x$. Также мы знаем, что $\dfrac{x-1}{2017-x} = \dfrac{3}{5}$. Перемножаем крест-накрест: $5(x - 1) = 3(2017 - x)$, или $8x = 6056$, откуда $x = 757$, а исходная дробь — $\dfrac{757}{1260}$.

21. Коля родился в прошлом веке. Мы знаем, что в 1999 году ему исполнилось столько лет, какова сумма цифр года, когда он родился. Какой год рождения у Коли?

Ответ. 1976. **Решение.** Если Коля родился в прошлом веке, то год его рождения имеет вид $\overline{19xy}$. В 1999 году ему исполнилось $99 - \overline{xy}$ лет, и по условию такова сумма цифр в год рождения. Имеем равенство $99 - 10x - y = 1 + 9 + x + y$, или $89 = 11x + 2y$. Так как x и y — цифры, у этого уравнения есть лишь одно решение — это $x = 7$, $y = 6$.

22. Сколько существует шестизначных чисел таких, что каждая цифра встречается столько раз, каково значение этой цифры? Примером такого целого числа является 133232.

Ответ. 82. **Решение.** Заметим, что сумма различных цифр этого числа равна 6, при этом цифры 0 нет в числе, тогда 6 можно представить в виде суммы различных цифр следующим образом: $6, 1 + 5, 1 + 2 + 3, 2 + 4$. Расставить цифры 1, 2 и 3 в числе можно $6 \cdot C_5^2 = 60$ способами, причем такие числа нам подходят (133232). Для 6 — 1 способ (666666), для пары (1, 5) — 6 способов (например 155555) и для пары (2, 4) — $C_6^2 = 15$ способов (например 224444), итого $60 + 1 + 6 + 15 = 82$ чисел, подходящих под условие задачи.

23. Рассмотрим прямоугольник из 2 строк и 2019 столбцов. Нужно закрасить каждую клетку в один из трех цветов так, чтобы соседние по стороне клетки были разных цветов. Сколько существует различных раскрасок?

Ответ. $6 \cdot 3^{2018}$. **Решение.** Посмотрим на самый левый столбец. Покрасить две его клетки можно $3 \cdot 2 = 6$ способами. Пусть левый столбец покрашен в цвета (a, b), тогда для второго столбца есть 3 варианта раскраски — $(c, a), (b, a), (b, c)$. При этом, для каждого следующего столбца также имеется 3 варианта на уже имеющуюся раскраску текущего столбца, значит, для каждого столбца, кроме первого, есть 3 способа его покраски, итого $6 \cdot 3^{2018}$ способов.

24. У Кати, Лизы, Маши и Насти вместе 100 леденцов. У любых двух девочек в сумме хотя бы 41 леденец. Какое наименьшее количество леденцов может быть у Лизы?

Ответ. 12. **Решение.** Обозначим количество леденцов у Кати, Лизы, Маши и Насти соотвественно за k, l, m, n. Тогда $k + l \geqslant 41, l + m \geqslant 41, l + n \geqslant 41$. Складывая эти неравенства получаем $2l + (k + l + m + n) \geqslant 123$. Причем $k + l + m + n = 100$, откуда $2l \geqslant 23$, или же в целых числах $l \geqslant 12$. Пример на 12 существует: $l = 12, m = n = 29, s = 30$.

25. Город представляет из себя пересечение 25 горизонтальных и 25 вертикальных улиц, идущих бесконечно далеко в обе стороны. Известно, что при движении по городу на каждом перекрестке надо поворачивать направо или налево. Путник въезжает в город сверху по самой левой вертикальной улице. Может ли он выехать из города по средней вертикальной улице вниз?

Ответ. Нет, не может. **Решение.** Рассмотрим шахматную раскраску перекрестков, в которой угловые перекрестки черные. Тогда после проезда черных перекрестков путник едет горизонтально, а после проезда по белым перекресткам — вертикально. Тогда и нижний перекресток 13-й вертикали, с которого надо выехать, тоже черный. Но с этого перекрестка можно ехать только горизонтально, значит, выехать из города с него не получится.

26. Учитель математики решил организовать две математические игры для своего класса. Для этого нужны были команды из пяти человек. В первом туре школьники разделились на команды самостоятельно. Во втором туре учитель разделил их так, чтобы никто не был в одной команде с кем-либо, с кем он играл в одной команде в первом раунде. Определите минимальное количество школьников в классе, при котором такое разделение возможно для проведения двух туров.

Ответ. 25. **Решение.** Рассмотрим одну команду во второй день. Каждый из ее участников в первый день был в команде с другими четырьмя людьми, причем эти люди различны, иначе в первый и во второй день какие-то двое были в одной команде. Поэтому всего людей хотя бы $5+5\cdot4 = 25$. *Пример* на это количество легко построить, представив людей в виде таблицы $5\times$ и

27. Найдите наибольший делитель числа 15!, который при делении на 6 дает остаток 5. Напомним, что через $n!$ обозначается произведение $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.

Ответ. 175175. **Решение.** Чтобы число при делении на 6 давало остаток 5, в произведении не должно присутствовать 2 и 3. Убирая все числа, кратные 2 и 3 получаем: $5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$. Это число дает остаток 1 при делении на 6. Если мы уберем 5, то остаток при делении на 6 будет 5, и при этом это наименьшее число, которое мы можем убрать, откуда ответ — $5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 175175$.

28. Бильбо пригласил на свой день рождения хоббитов и гномов. Каждые 2 гостя пожали друг другу руки, кроме Бильбо — он пожимал руки только хоббитам. Сколько гномов было на дне рождения Бильбо, если всего было сделано 25 рукопожатий?

Ответ. 3. **Решение.** Заметим, что гостей меньше 8, так как иначе рукопожатий было хотя бы $\frac{8\cdot7}{2} = 28$. Также, гостей не могло быть меньше 7, так как иначе максимум было сделано $\frac{6\cdot5}{2} + 6 = 21$ рукопожатий. Откуда следует, что гостей было 7 и между ними было сделано $\frac{7\cdot6}{2} = 21$ рукопожатий, тогда Бильбо сделал $25 - 21 = 4$ рукопожатия, следовательно хоббитов было 4, а гномов $7 - 4 = 3$.

29. Даны числа $1, 2, \ldots, 99, 100$. Какое наибольшее количество из них можно выбрать, если произведение любых 11 чисел из выбранных должно делиться на 6?

Ответ. 36. **Решение.** Давайте посмотрим на следующие 3 группы чисел: A — кратные 6, B — нечетные, C — не кратные 3. Есть числа, которые одновременно принадлежат группам B и C, но числа из группы A не принадлежат группам B и C. Мы можем взять не больше 16 чисел из группы A, так как в группе A всего 16 чисел, не больше 10 чисел из каждой из групп B и C, так как иначе, мы сможем взять 11 чисел из группы B или из группы C, и их произведение не будет кратно 6. Таким образом, ответ: $16 + 10 + 10 = 36$. Пример чисел из групп $A = \{6, 12, 18, \ldots, 96\}$, $B' = \{3, 9, 15, 21, 27, 33, 39, 45, 51, 57\} \subset B$ и $C' = \{2, 4, 8, 10, 14, 16, 20, 22, 26, 28\} \subset C$.

30. Натуральное n таково, что его самый большой натуральный делитель, отличный от самого себя, на единицу больше куба своего наименьшего натурального делителя, большего одного. Найдите n.

Ответ. 18. **Решение.** Заметим, что наибольший и наименьший натуральные делители, отличные от самого числа, разной четности, откуда следует, что присутствует делитель 2, поэтому это наименьший натуральный делитель, отличный от самого числа. А наибольший делитель, отличный от самого числа — $\frac{n}{2}$. Тогда $\frac{n}{2} = 2^3 + 1$, откуда $n = 18$.

31. На заседании комитета по прогуливаниям, состоящего из 35 человек, присутствовали не все. Во время заседания каждый из присутствующих назвал троих отсутствующих. Сколько членов комитета присутствовали на собрании, если всех отсутствующих назвали по 2 раза?

Ответ. 14. **Решение.** Пусть на заседании присутствовало x человек, тогда отсутствовало $35 - x$. Из условия задачи получаем $3x = 2 \cdot (35 - x)$, откуда $x = 14$.

32. Перед Петей и Васей лежит квадрат 10×10. Сначала Петя вырезает из него 2 клетки. Затем Вася разрезает оставшуюся фигуру на клетчатые прямоугольники ширины 1. На какое наименьшее число прямоугольников может разрезать фигуру Вася, какие бы 2 клетки ни вырезал Петя?

Ответ. На 12 частей. **Решение.** На 12 частей всегда можно разрезать, для этого достаточно порезать по столбцам. Каждая вырезанная Петей клетка добавляет не больше одной части, поэтому всего частей не больше $10 + 2 = 12$.

Покажем, как Пете вырезать клетки, чтобы Вася не смог разрезать на меньшее число прямоугольников. Вырежем клетки $b2$ и $c3$. Тогда две клетки над вырезанными, две клетки под вырезанными, клетки $a2$, $d3$, а также шесть клеток главной диагонали от $e5$ до $j10$ образуют 12 клеток, никакие две из которых не могут принадлежать одному прямоугольнику ширины 1. Значит, Вася не сможет обойтись менее, чем 12-ю прямоугольниками.

33. Какое наибольшее количество подряд идущих чисел можно представить в виде суммы двух не обязательно различных простых чисел?

Ответ. 7 чисел. **Решение.** Пример на 7 чисел: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Легко привести примеры для каждого из этих чисел. Пусть существует хотя бы 8 таких чисел. Заметим, что хотя бы 4 числа нечетны, значит, могут быть представлены только как $2 + p$, где p — нечетное простое число. Тогда эти простые числа — последовательные нечетные, и среди трех таких чисел одно делится на 3. Единственный случай, когда оно может быть простым — это $p = 3$. Но в таком случае четвертое нечетное число равно 11, и его уже представить в виде $2 + p$ нельзя, так как число 9 не простое.

34. Есть квадрат 8×8, в котором подряд по строчкам выписаны числа от 1 до 64. За один ход можно выбрать 2 числа, находящихся в одной строке или в одном столбце, и прибавить к обоим по единице. За какое наименьшее количество ходов можно сделать все числа равными?

Ответ. За 1008 ходов. **Решение.** В полученном квадрате каждое число не меньше 64, поэтому сумму всех чисел надо увеличить хотя бы на $0 + 1 + 2 + \ldots + 63 = 32 \cdot 63$. За один ход сумма увеличивается на 2, поэтому ходов хотя бы $16 \cdot 63 = 1008$.

Пример на это количество ходов следующий. Разобьем числа в каждой строке на пары, и будем за 4 хода прибавлять по 1 ко всем числам строки. Тогда через несколько ходов мы сможем получить все строки, равные последней. После этого разобьем клетки в столбцах на пары, за 4 хода мы умеем увеличивать все числа в столбце на 1, значит, сможем сделать все числа в квадрате равными 64. Это потребует ровно 1008 ходов.

35. Перед Петей и Васей лежит квадрат 12×12. У Пети есть очень много клетчатых прямоугольников 1×6 и 2×3. Каждый ход он выдает Васе один из этих прямоугольников, а Вася должен положить этот прямоугольник по клеткам квадрата 12×12 без наложений на другие прямоугольники. Какое наибольшее число ходов может сделать Вася, как бы ни действовал Петя?

Ответ. 11. **Решение.** Покажем, что Вася всегда сможет разместить 11 прямоугольников. Разобьем квадрат на 12 прамоугольников 2×6. Мысленно упорядочим их. Будем заполнять их прямоугольниками 1×6 с начала, а прямоугольниками 2×3 с конца. Очевидно, что мы не сможем сделать ход, только если в поямоугольнике 2×6 уже есть какой то прямоугольник и мы пытаемся расположить прямоугольник другого типа. Покажем, что Петя может не дать Васе разместить все 12 прямоугольников. Пусть Петя выдаст 11 прямоугольников 1×6 и один прямоугольник 2×3 в любом порядке. Покажем, что их нельзя разместить в данном квадрате. Действительно, рассмотрим диагональную раскраску в 6 цветов. В квадрате 12×12 всех цветов будет поровну, и так как прямоугольник 1×6 закрывает поровну клеток каждого цвета, то для прямоугольника 2×3 остается по одной клетке каждого цвета. Но такого расположения не существует.

36. Существует ли натуральное число, у которого ровно 10 натуральных делителей, все из которых оканчиваются на разные цифры?

Ответ. Нет, не существует. **Решение.** Рассмотрим делитель, оканчивающийся на 0. Его наличие означает, что само число делится на 10. Тогда у числа два делителя — оно само и число 10 — оканчиваются на 0. Это противоречит условию, кроме случая, когда само число и есть 10. Но такое число также не подходит под условие, например, потому, что у него нет делителя, оканчивающегося на 3.

37. На II турнире "Математические игрища" каждая команда сыграла с каждой по одному разу. Известно, что команда "Ромашки" набрала больше баллов, чем любая другая, но при этом она одержала побед меньше, чем любая другая команда. При каком наименьшем количестве команд-участниц это возможно? На турнире за победу даются 2 очка, за ничью — 1 очко, за победу — 0 очков.

Ответ. 6 команд. **Решение.** *Пример.* Расставим 5 команд по кругу и пусть каждая из них выиграет двух следующих по кругу. Шестая команда "Ромашки" выиграет одну из первоначальных и сыграет в ничью с остальными. Несложно проверить, что у "Ромашек" 6 очков и 1 победа, у стальных команд 4 или 5 очков и по две победы.

Оценка. У команды "Ромашки" должна быть хотя бы одна победа, иначе эта команда наберет не более, чем среднее арифметическое всех баллов и не станет победителем. Тогда у остальных команд хотя бы по две победы, и остальных команд хотя бы три. Если их три или четыре, то хотя бы две из них выиграют "Ромашек", и у нее будет не более двух результативных матчей.

38. Каждая из клеток таблицы 101×101 покрашена в черный или белый цвет. За один ход разрешается выбрать строку или столбец и перекрасить все клетки в тот цвет, который встречается в этой линии чаще остальных. Всегда ли можно за несколько ходов закрасить всю таблицу в один цвет?

Ответ. Да, всегда. **Решение.** Сначала проведем операцию перекрашивания последовательно для всех столбцов. Получим таблицу, в которой каждая строка окрашена одинаковым образом. Поэтому, перекрашивая в этой таблице строки по очереди, мы все строки перекрасим в один и тот же цвет.

39. Девяти мудрецам надели разноцветные колпаки: синего, белого, красного и зеленого цвета. При этом мудрецам известно, что колпаки всех цветов присутствуют. Мудрецы сидят в кругу, они видят колпаки всех людей, но не видят цвет своего колпака. Сначала всех мудрецов одновременно спросили: "Ваш колпак зеленый?" Никто не ответил ни "да", ни "нет". Через минуту этот вопрос снова повторили всем мудрецам. Некоторые мудрецы ответили "нет", но никто не ответил "да". Сколько было мудрецов в зеленых колпаках?

Ответ. Трое. **Решение.** Пусть есть мудрец, колпак которого отличается от всех остальных. Тогда увидев, что среди колпаков его товарищей один из цветов отсутствует, он сообразил бы, какого цвета его собственный колпак и ответил бы на первый вопрос либо "да", либо "нет". Но этого не произошло, значит, есть по меньшей мере два колпака каждого цвета, и мудрецы знали это перед вторым вопросом. Тогда если зеленых колпаков ровно два, то каждый из их владельцев, видя только один зеленый колпак, сообразил бы, что и его колпак зеленый, и ответил бы на второй вопрос "да". Значит, зеленых колпаков не менее 3. Если зеленых колпаков не менее 4, то всего колпаков не менее $4 + 2 + 2 + 2 = 10$, чего не может быть. Значит, зеленых колпаков 3.

40. При каком наибольшем n клетки доски 4×4 можно раскрасить в n цветов так, чтобы для любых двух разных цветов нашлись две соседние по стороне клетки, окрашенные в эти два цвета?

Ответ. При $n = 7$. **Решение.** Заметим, что у нас есть 24 пары соседних клеток (по 3 пары в каждой строке и каждом столбце). Предположим, $n \geqslant 8$. Пар цветов всего $n \cdot (n-1)/2 \geqslant 28$, и это больше, чем общее число пар соседних клеток. Противоречие.

Осталось построить пример для 7 цветов: по строкам 1, 2, 3, 5; 3, 6, 4, 2; 7, 5, 1, 7; 7, 4, 6, 7.